SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

DIPLOMSKI RAD

Mentori: Student:

Prof. dr. sc. Biserka Runje, dipl. ing. Sveto Dobrota

Zagreb, 2012.

IZJAVA:

Izjavljujem da sam ovaj rad izradio samostalno koristeći stečena znanja tijekom studija i navedenu literaturu.

Zahvaljujem se:

Voditeljici rada Biserki Runje na stručnim savjetima, sugestijama i pomoći tokom izrade završnog rada,

Docentu Juliju Jakšetiću na pomoći i ljubaznosti prilikom rješavanja pitanja vezanih za ovaj rad,

Svim svojim kolegama i prijateljima na potpori koju su mi pružili tokom svih godina studiranja.

Posebna zahvala svojoj obitelji na razumijevanju i potpori tokom izrade ovog rada, a pogotovo tokom cijelog studija

Sveto Dobrota

Sadržaj:

POPIS SLIKA:

POPIS TABLICA:

POPIS OZNAKA

E_n		Faktor slaganja
k		Faktor pokrivanja
KCRV	mm	Key Comparison Reference Value
p_i		Vjerojatnost ili relativna frekvencija
P		Razina povjerenja
R_b		Birge kriterij
u	mm	Mjerna nesigurnost
U	mm	Proširena mjerna nesigurnost
T, x_t	mm	Totalni medijan
$\bar{x}$	mm	Aritmetička sredina
x_i	mm	Rezultat mjerenja
$x_{med.}$	mm	Medijan
$x_{ref.}$	mm	Referentna vrijednost
x_w	mm	Modificirana težinska sredina
χ^2		Hi - kvadrat

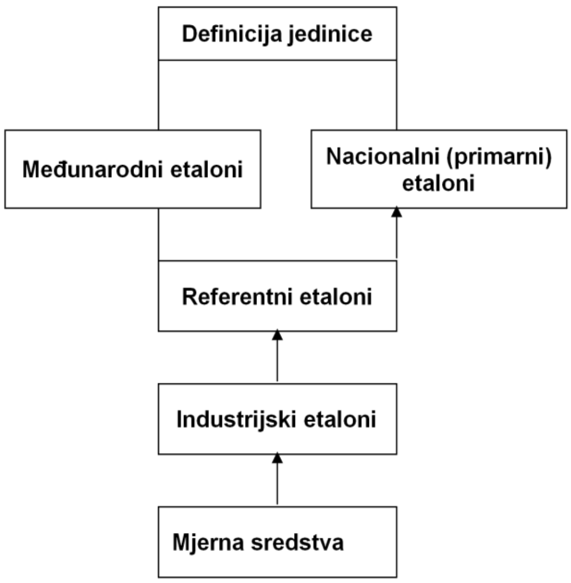
SAŽETAK

Tema ovog diplomskog rada je analiza rezultata usporedbenih mjerenja. Rad je podijeljen na četiri dijela.

U prvom dijelu je riječ o izračunu mjerne nesigurnosti kao jako bitnom dijelu rezultata svakog laboratorija. Drugi dio donosi dvije metode koje se danas koriste za usporedbu rezultata mjerenja. Prva s pomoću faktora slaganja i Birgeovog kriterija u kojoj je najvažnija komponenta izračun referentne vrijednosti. Za izračun referentne vrijednosti koristili su se različiti procjenitelji: težinska aritmetička sredina, totalni medijan, te kombinacija ta dva procjenitelja. Druga metoda se temelji na hi-kvadrat testu s pomoću težinske aritmetičke sredine kao referentne vrijednosti (*KCRV*). Uz svaku metodu slijedi primjer proračuna s rezultatima jednog usporednog mjerenja. Treći dio rada uspoređuje metode, dok četvrti dio je kritički osvrt na prikazane metode. U zadnjem dijelu također se navodi i potencijalno rješenje problema koji se pojavljuje pri izračunu i tumačenju faktora slaganja E_n.

1. UVOD

U današnjem svijetu s brojnim gospodarskim i ekonomskim krizama opstaju samo najbolji. Temelj razvoja i opstanka svake zemlje je dobra infrastruktura. Mjeriteljstvo je jedno od temelja tehničke infrastrukture. Zbog toga velika je zadaća na nacionalnim mjeriteljskih laboratorija koji mogu gospodarstvu osigurati mjerno jedinstvo. To je stanje u kojem su mjerni rezultati izraženi u zakonitim jedinicama koji se mogu, s utvrđenim mjernim nesigurnostima dovesti u vezu s referentnim etalonima. Osim etalona, za osiguravanje mjernog jedinstva važni su mjeriteljska infrastruktura, umjeravanje i sljedivost. Sljedivost je svojstvo mjernog rezultata ili vrijednosti nekog etalona po kojemu se on može dovesti u vezu s navedenim referentnim etalonima (obično državnim ili međunarodnim) neprekinutim lancem usporedba koje imaju utvrđene mjerne nesigurnosti. Lanac sljedivosti prikazan je na slici 1.



Slika 1. Lanac sljedivosti

Mjeriteljstvo uključuje rad nacionalnih mjeriteljskih instituta i međunarodne ugovore kao što su Dogovor o metru, kojim se Međunarodni odbor za utege i mjere (CIPM) i Međunarodni ured za utege i mjere (BIPM) ovlašćuju da rade na mjernim etalonima čija se točnost, područje primjene i raznolikost neprekidno povećavaju. Zadaća BIPM-a je osigurati svjetski temelj za jedinstven suvisao sustav mjerenja sljediv prema Međunarodnom sustavu jedinica SI. Ta zadaća poprima mnoge oblike, od izravnog prenošenja jedinica (kao u slučaju mase i vremena) do usklađivanja preko međunarodnih usporedba nacionalnih mjernih etalona.

Važnost usporedbenih mjerenja je dakle velika. Postoji više organiziranih usporedba na više različitih razina važnosti. Najvažnije su one koje propisuje CIMP kao vrhovno tijelo u mjeriteljstvu. Postoji dva su tipa ključnih usporedbi:

- u prvoj kategoriji su one usporedbe za čiji se standard ili realizaciju jedinice koja se uspoređuje pretpostavlja da ima dugoročnu stabilnost
- u drugoj kategoriji su oni za koje se ne može pretpostaviti dugoročna stabilnost.

Procedure za provođenje usporedbi i u nekim slučajevima evaluaciju rezultata se mogu razlikovati za ove dvije kategorije. Općenito procedure propisuje BIMP koje se mogu pronaći na njihovim stranicama, međutim one nisu tema ovog rada.

Dakle, usporedbena mjerenja su ona organizirana mjerenja u kojem sudjeluju dva ili više laboratorija gdje je cilj procjena mjerne sposobnosti, odnosno kvalitete mjerenja dotičnog laboratorija. Usporedba, ako je na najvišoj razini, može pokazati koji laboratoriji osiguravaju sljedivost, odnosno mjerno jedinstvo. Ako laboratorij izgubi to svojstvo osiguravanja mjernog jedinstva, ne gubi samo laboratorij već i cijeli proizvodni sustav vezan za njega, dakle gospodarstvo određenog područja. Zbog toga iznimno je bitna metoda usporedbe rezultata usporedbenih mjerenja. U prvom dijelu rada je u kratko opisan postupak izračuna mjerne nesigurnosti, a u nastavku kao temelj rada i pregled metoda koje se danas koriste, te njihove prednosti i nedostatci.

2. MJERNA NESIGURNOST

Jedan od glavnih problema u mjeriteljstvu je procjena mjerne nesigurnosti rezultata mjerenja. Tradicionalne metode koje su se koristile za procjenu mjerene nesigurnosti, a bile su bazirane na iskustvu i ugledu osobe i laboratorija gdje su se vršila mjerenja, danas takve metode nisu više dovoljne već su se pojavili zahtjevi o dokazima za iskazanu mjernu nesigurnost. Zbog toga se pojavila potreba za pronalazak općih pravila i matematičkih modela za proračun i iskazivanje mjerene nesigurnosti. Tako je 1993 godine skupina stručnjaka iz međunarodnih organizacija s područja mjeriteljstva (ISO, IEC, BIPM, OIML, IUPAP, IUPAC, IFCC), u skladu sa zahtjevima od strane CIPM-a, izradila Upute za iskazivanje mjerne nesigurnosti ISO Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement (GUM). Prihvaćanjem međunarodnog dogovora za iskazivanje mjerne nesigurnosti omogućeno je nedvosmisleno iskazivanje i usporedba mjernih rezultata dobivenih u različitim institutima, mjeriteljskim i ispitnim laboratorijima.

Postoji još jedna metoda proračuna mjerene nesigurnosti. Europska organizacija, Joint Committee for Guides in Metrology (YCGM), 2006. godine izdaje dokument YCGM YYY/2006 : Evaluation of measurement data - Supplement 1 to the “Guide to the expression of uncertainty in measurement” - Propagation of distributions using a Monte Carlo method. Dok je GUM utemeljio opća pravila za proračun i iskazivanje mjerne nesigurnosti sa svrhom da budu primjenjiva na širokom spektru mjerenja, YCGM dokument koncentrirao se na alternativnu Monte Carlo metodu koja se, također, koristi za lakši i jednostavniji proračun i iskazivanje mjerne nesigurnosti. U kratkom opisu mjerne nesigurnosti opisat ćemo GUM metodu koja je šire primjenjiva.

2.1. Općenito o mjernoj nesigurnosti

Mjerna nesigurnost je pozitivan parametar koji karakterizira rasipanje vrijednosti koje bi se razumno mogle pripisati mjernoj veličini, prema informacijama koje se upotrebljavaju, uz određenu vjerojatnost. Taj parametar može biti primjerice bilo kakvo odstupanje ili poluširina intervala s navedenom razinom povjerenja. Mjerna nesigurnost se sastoji od više sastavnica. Neke od tih sastavnica mogu se odrediti na temelju statističke razdiobe niza mjerenja i mogu se opisati eksperimentalnim standardnim odstupanjima. Druge sastavnice, koje se također mogu opisati standardnim odstupanjima, određuju se iz pretpostavljenih razdioba vrijednosti na temelju iskustva ili drugih podataka.

Nesigurnost mjernog rezultata odražava pomanjkanje točnog znanja vrijednosti mjerne veličine. Mjerni je rezultat i nakon ispravka utvrđenih sustavnih djelovanja, zbog nesigurnosti koja potječe od slučajnih djelovanja i zbog nesavršenosti ispravka rezultata zbog sustavnih djelovanja, još uvijek samo procjena vrijednosti mjerne veličine.

Mjerenja nisu savršena kako zbog djelovanja slučajnih utjecaja (trenutna promjena temperature, tlaka i vlage ili neiskustvo mjeritelja, nesavršenost uređaja i osjetila) tako i zbog ograničenih mogućnosti korekcije sustavnih djelovanja (promjena karakteristike instrumenta između dva umjeravanja, utjecaj mjeritelja pri očitavanju analogne skale, nesigurnost vrijednosti referentnog etalona itd.). Mjerna nesigurnost je upravo posljedica djelovanja slučajnih utjecaja i ograničenih mogućnosti korekcije sustavnih djelovanja.

U praksi postoji mnogo mogućih izvora nesigurnosti u mjerenju:

a) Nepotpuno određivanje mjerene veličine
b) Nesavršeno ostvarenje određivanja mjerne veličine
c) Nereprezentativno uzrokovani, izmjereni uzorak ne mora predstavljati točno određenu mjernu veličinu
d) Nedovoljno poznavanje djelovanja uvjeta okoliša na mjerenje ili nesavršeno mjerenje uvjeta okoliša
e) Osobnu pristranost u očitavanju analognih instrumenata
f) Konačno razlučivanje instrumenata ili prag pokretljivosti
g) Netočne vrijednosti mjernih etalona i referentnih tvari
h) Netočne vrijednosti stalnica i drugih parametara dobivenih iz vanjskih izvora i upotrebljavanih u algoritmu za obradu podataka
i) Približna određenja i pretpostavke uključene u mjernu metodu i postupak
j) Promjene opetovanih opažanja mjerne veličine u očigledno istovjetnim uvjetima

Ovi izvori nisu nužno neovisni, pa neki od izvora a) do i) mogu doprinositi izvoru j).

Mjernu nesigurnost procjenjujemo radi nedvosmislenog iskazivanja i usporedbe mjernih rezultata dobivenih u različitim umjernim i ispitnim laboratorijima, te radi usporedbe mjernih rezultata sa specifikacijama proizvođača ili zadanom tolerancijom.

2.2. Procjena mjerne nesigurnosti GUM metodom

2.2.1 Modeliranje mjerenja

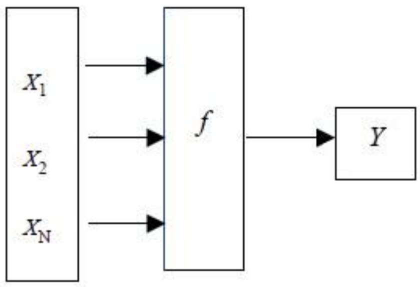
U većini slučajeva mjerena veličina Y ne mjeri se izravno nego se određuje iz N drugih veličina $X_1, X_2, \ldots, X_N$ na temelju funkcijskog odnosa f:

Matematički model mjerenja jedne (skalarne) veličine može se izraziti na temelju tog funkcijskog odnosa f:

$$Y = f(\boldsymbol{X}) \tag{1}$$

gdje vektor $\boldsymbol{X}$ predstavlja N ulaznih veličina $(X_1, X_2, \ldots, X_N)^T$, dok je Y izlazna skalarna veličina. Svaki X_i se promatra kao slučajna varijabla, a njena procjena je x_i. Y je, također, slučajna izlazna varijabla, a njena procjena se označava sa y.

U slici 2. je prikazan skalarni odnos između ulaznih veličina i mjerene veličine.



Slika 2. Skalarni odnos između ulaznih veličina i mjerene veličine

Ulazne veličine $X_1, X_2, \ldots, X_N$ o kojima ovisi izlazna veličina Y mogu se same promatrati kao mjerene veličine i mogu same ovisiti o drugim veličinama, uključujući ispravke i faktore ispravka zbog sustavnih djelovanja, dovodeći tako do složenog funkcijskog odnosa f koji se ne mora uvijek može eksplicitno napisati. Funkcija f, može biti određena eksperimentalno ili postojati samo kao kakav algoritam koji se mora brojčano proračunati. Funkciju f treba tumačiti u tom širem smislu, a posebno kao funkciju koja sadrži svaku veličinu uključujući sve ispravke i faktore ispravka, koja može kojom značajnom sastavnicom nesigurnosti doprinijeti mjernom rezultatu.

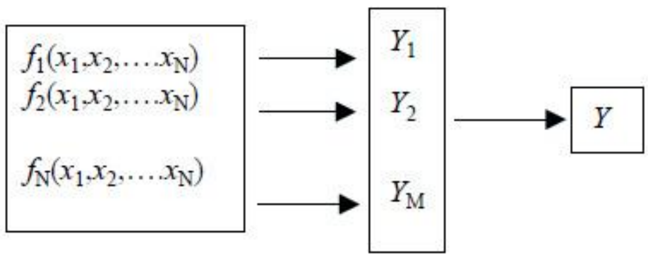
Skup ulaznih veličina $X_1, X_2, \ldots, X_N$ može se svrstati u razrede:

- veličina čije se vrijednosti i nesigurnosti izravno određuju u stvarnom mjerenju. Te se vrijednosti i nesigurnosti mogu dobiti, primjerice, iz kojeg pojedinačnog opažanja, opetovanih opažanja ili prosudbe koja se temelji na iskustvu, a može uključivati određivanje ispravaka očitavanja instrumenta i ispravaka zbog utjecajnih veličina kao što su temperatura okoliša, barometarski tlak i vlažnost.

- veličina čije se vrijednosti i nesigurnosti uvode u mjerenje iz vanjskih izvora kao što su veličine pridružene mjernim etalonima, potvrđenim referentnim tvarima i referentnim podacima dobivenim iz priručnika.

Procjena mjerene veličine *Y*, koja se označuje s *y*, dobiva se iz navedene jednadžbe (1) uporabom procjena ulaznih veličina $x_1, x_2, \dots, x_N$ za vrijednosti tih *N* veličina $X_1, X_2, \dots, X_N$. Prema tome, procjena izlazne veličine *y* tog mjernog rezultata daje se izrazom:

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_N) \tag{2}$$



Slika 3. Vektorski odnos između ulaznih veličina i mjerene veličine

U nekim se slučajevima ta procjena *y* može dobiti i iz izraza:

$$y = \overline{Y} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \overline{Y}_k = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(X_{1,k}, X_{2,k}, \dots, X_{N,k}) \tag{3}$$

Kao procjena *y* uzima se aritmetička sredina ili prosjek n neovisnih određivanja Y_k veličine *Y*, od kojih svako ima istu nesigurnost i svako se temelji na potpunom skupu opaženih vrijednosti *N* neovisnih veličina X_i dobivenih u isto vrijeme. Ovom načinu usrednjavanja može se dati prednost kad je *f* nelinearna funkcija ulaznih veličina $X_1, X_2, \dots, X_N$ pred usrednjavanjem $y = f(\overline{X}_1, \overline{X}_2, \dots, \overline{X}_N)$,

gdje je: $\overline{X}_i = \dfrac{\sum_{k=1}^{n} X_{i,k}}{n}$ - aritmetička sredina pojedinačnih opažanja $X_{i,k}$, ali ta su dva pristupa istovjetna ako je *f* linearna funkcija veličina X_i.

Procijenjeno standardno odstupanje pridruženo procjeni izlazne veličine ili mjernog rezultata *y*, koje se naziva sastavljenom standardnom nesigurnošću i označuje se $u_c(y)$, određuje se iz procijenjenog standardnog odstupanja pridruženog procjeni ulazne veličine x_i, koje se naziva standardnom nesigurnošću i označuje s $u(x_i)$.

Svaka procjena ulazne veličine x_i i njezina pridružena standardna nesigurnost $u(x_i)$ dobivaju se iz razdiobe mogućih vrijednosti ulazne veličine X_i. Ta razdioba vjerojatnosti može se temeljiti na frekvenciji, tj. na nizu opažanja $X_{i,k}$ veličine X_i, ili to može biti kakva apriorna razdioba. Proračuni sastavnica A-vrste standardne nesigurnosti nalaze se iz funkcije gustoće vjerojatnosti izvedeni iz promatrane distribucije učestalosti ponavljanja , dok se proračuni B-vrste nalaze iz pretpostavljenih funkcija gustoće vjerojatnosti baziranih na stupnju vjerovanja da će se slučaj dogoditi. Mora se shvatiti da su u oba slučaja te razdiobe modeli koji služe za prikaz stanja našeg znanja.

2.2.1 Proračun standardne nesigurnosti A-vrste

Nesigurnost A-tipa određuje se eksperimentalno, ponavljanjem mjerenja. Na temelju rezultata opetovanih mjerenja može se izračunati aritmetička sredina i standardno odstupanje. U većini slučajeva najbolja je raspoloživa procjena očekivanja ili očekivane vrijednosti μ_q veličine q koja se mijenja na slučajan način i za koju je u istim mjernim uvjetima dobiveno n neovisnih opažanja q_k aritmetička sredina ili prosjek q tih n opažanja.

$$\bar{q} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} q_k \tag{4}$$

Prema tome da bi se odredio mjerni rezultat y u jednadžbi za ulaznu se veličinu X_i procijenjenu iz n neovisnih opetovanih opažanja $X_{i,k}$ kao procjena x_i ulazne veličine upotrebljava aritmetička sredina X_i dobivena iz jednadžbe; tj. x_i = X_i. Procjene onih ulaznih veličina koje se ne proračunavaju iz opetovanih opažanja, kao što su veličine koje su naznačene u drugom razredu veličina moraju se dobiti drugim metodama.

Pojedinačna opažaja q_k razlikuju se po vrijednosti zbog slučajnih promjena utjecajnih veličina ili slučajnih djelovanja. Eksperimentalna varijanca tih opažanja, koja daje procjenu varijance σ^2 razdiobe vjerojatnosti veličine q, dana je izrazom:

$$s^2(q_k) = \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}(q_k - \bar{q})^2 \tag{5}$$

Ta procjena varijance i njezin pozitivni drugi korijen $s(q_k)$, koji se naziva eksperimentalnim standardnim odstupanjem, opisuju promjenljivost opaženih vrijednosti q_k ili, točnije, njihovo rasipanje oko njihove srednje vrijednosti q_k.

Najbolja procjena varijance srednje vrijednosti σ^2 ($\bar{q}$) dana je izrazom:

$$u^2(x_i) = s^2(\bar{q}) = \frac{s^2(q_k)}{n} \tag{6}$$

Eksperimentalna varijanca srednje vrijednosti $s^2(\bar{q})$ i eksperimentalno standardno odstupanje srednje vrijednosti $s(\bar{q})$ koje je jednako pozitivnom drugom korijenu iz $s^2(\bar{q})$, količinski određuju mjeru koliko dobro $\bar{q}$ procjenjuje očekivanje μ_q veličine q, a oboje se može upotrebljavati kao mjera nesigurnosti srednje vrijednosti $\bar{q}$.

Na taj je način za ulaznu veličinu X_i određenu iz n neovisnih opetovanih opažanja $X_{i,k}$ standardna nesigurnost $\mu(x_i)$ njezine procjene $x_i = X_i$ uz $s^2(\bar{X}_i)$ izračunano u skladu s jednadžbom je jednaka $u(x_i) = s(\bar{X}_i)$. Radi pogodnosti $u^2(x_i) = s^2(\bar{X}_i)$ i $u(x_i) = s(\bar{X}_i)$ katkad se redom nazivaju varijancom A-vrste i standardnom nesigurnošću A-vrste.

Za dobro opisano mjerenje pod statističkim nadzorom može biti raspoloživa sastavljena ili skupna procjena varijance s_p^2 (ili združeno eksperimentalno standardno odstupanje s_p) koja opisuje mjerenje. U takvim slučajevima, kada se vrijednost mjerene veličine q određuje iz n neovisnih opažanja, eksperimentalna varijanca aritmetičke sredine $\bar{q}$ tih opažanja bolje se procjenjuje s pomoću s_p^2/n nego s pomoću $s^2(\bar{q})/n$, a standardna je nesigurnost jednaka $u = s_p / \sqrt{n}$.

2.2.2 *Proračun standardne nesigurnosti B-vrste*

Za procjenu x_i ulazne veličine X_i koja nije dobivena iz opetovanih opažanja pridružena procjena varijance $u^2(x_i)$ ili standardna nesigurnost $u(x_i)$ proračunava se znanstvenom prosudbom koja se temelji na svim raspoloživim podacima o mogućoj promjenljivosti X_i.
Takav skup podataka može uključivati:

- prijašnje mjerne podatke
- iskustvo s tvarima i instrumentima ili opće poznavanje ponašanja i svojstava bitnih tvari i instrumenata
- proizvođačke specifikacije
- podatke dane u potvrdama o umjeravanju i drugim potvrdama
- nesigurnosti dodijeljene referentnim podacima uzetim iz priručnika.

Radi pogodnosti na ovaj način proračunane $u^2(x_i)$ i $u(x_i)$ katkad se nazivaju redom varijancom B-vrste i standardnom nesigurnošću B-vrste.

Ispravna uporaba skupa raspoloživih podataka za proračun standardne nesigurnosti B-vrste zahtijeva sposobnost opažanja koja se temelji na iskustvu i općem znanju, a to je vježba koja se jedino praksom može naučiti.

Postoje nekoliko slučajeva procjene i izračuna standardne nesigurnosti B-vrste, od kojih su svi podjednako točni, te ne postoji klasifikacija procjene prema kvaliteti proračuna, već ovise o načinu iskaza.

Jedan od slučajeva je da se procjena x_i uzima se iz proizvođačeve specifikacije, potvrde o umjeravanju, priručnika ili drugog izvora. Kod ovog tipa podataka, iskazana nesigurnost navodi se kao poseban višekratnik standardnog odstupanja. Standardna nesigurnost $u(x_i)$ tada je jednostavno jednaka navedenoj vrijednosti podijeljenoj tim množiteljem, a procijenjena je varijanca $u^2(x_i)$ jednaka drugom korijenu tog količnika.

U drugom slučaju može se tvrditi da navedena nesigurnost određuje interval koji ima razinu povjerenja od 90, 95 ili 99%. Ako nije drugačije naznačeno pretpostavlja se da je za izračunavanje navedene nesigurnosti upotrijebljena normalna razdioba. Dijeljenjem navedene nesigurnosti odgovarajućim faktorom za normalnu razdiobu natrag može se dobiti standardna nesigurnost procjene x_i. Faktori koji odgovaraju trima gornjima razinama mogu se preuzeti iz tablice 1.

Tablica 1. Vrijednost faktora pokrivanja k_p koji uz pretpostavku normalne razdiobe daje interval povjerenja koji ima razinu povjerena p

Razina povjerenja P (%)	Faktor pokrivanja k_p
68,27	1
90	1,645
95	1,960
95,45	2
99	2,576
99,73	3

U nekim slučajevima procjena se zasniva na apriornim razdiobama vjerojatnosti. Tada je moguće procijeniti samo granice (gornju i donju) veličine X_i. Kod ovog slučaja najčešće se javlja pravokutna razdioba, za koju postoji 100% vjerojatnost da x_i leži unutar granica a_- i a_+, a 0% izvan tog intervala. Tada je očekivana vrijednost veličine X_i jednako središtu tog intervala:

$$x_i = \frac{a_- + a_+}{2} \tag{7}$$

a pripadna varijanca jest:

$$u^2(x_i) = \frac{(a_+ - a_-)^2}{12} \tag{8}$$

U posebnom slučaju kada su granice intervala simetrične, tj. kada vrijedi a_+ - a_- = $2a$, tada jednadžba (8) postaje:

$$u^2(x_i) = a^2/3 \tag{9}$$

2.2.3 *Određivanje sastavljene standardne nesigurnosti*

I) Nekorelirane ulazne veličine

Ovaj odlomak obrađuje slučaj gdje su sve ulazne veličine neovisne. O slučaju kad su dvije ili više veličina povezane, tj. kad su međuovisne ili korelirane govorit će se u idućem dijelu.

Standardna nesigurnost veličine *y*, gdje je *y* procjena mjerene veličine *Y*, pa prema tome i mjernog rezultata, dobiva se odgovarajućim sastavljanjem standardnih nesigurnosti procjena ulaznih veličina $x_1, x_2, \ldots, x_N$. Ta sastavljena standardna nesigurnost procjene *y* označuje se s $u_c(y)$.

Sastavljena je standardna nesigurnost $u_c(y)$ pozitivan drugi korijen sastavljene varijance $u_c^2(y)$ koja je dana izrazom:

$$u_c^2(y) = (\frac{\partial f}{\partial x_i})^2 u^2(x_i) \tag{10}$$

gdje je funkcija *f* dana jednadžbom (1). Svako $u(x_i)$ standardna je nesigurnost proračuna prema opisu A ili B-vrste. Sastavljena standardna nesigurnost $u_c(y)$ procjena je standardnog odstupanja i opisuje rasipanje vrijednosti koje bi se razumno mogle pripisati mjernoj veličini *Y*.

Sastavljena varijanca $u_c^2(y)$ može se promatrati kao zbroj članova od kojih svaki predstavlja procijenjenu varijancu pridruženu procjeni izlazne veličine proizvedene procijenjenom varijancom pridruženom svakoj procjeni x_i ulazne veličine. To navodi da se jednadžba (9) napiše u obliku:

$$u_c^2(y) = \sum_{i=1}^{n} \left[c_i u(x_i)\right]^2 \equiv \sum_{i=1}^{N} u_i^2(y) \tag{11a}$$

gdje je:

$$c_i \equiv \partial f / \partial x_i, \qquad u_i(y) \equiv |c_i| u(x_i) \tag{11b}$$

Ako se jednadžba (1) za mjerenu veličinu *Y* razvije oko nazivnih vrijednosti $X_{i,0}$ ulaznih veličina X_i, tada je za razvoj do članova prvog reda $Y = Y_0 + c_1\delta_1 + c_2\delta_1 + \ldots + c_N\,\delta_N$, gdje su $Y_0 = f(X_{1,0}, X_{2,0}, \ldots, X_{N,0})$, $c_i = (\partial f / \partial X_i)$ izračune u $X_i = X_{i,0}$ i $\delta_i = X_i - X_{i,0}$.

Dakle za potrebe analize nesigurnosti mjerena se veličina transformacijom njezinih ulaznih veličina od X_i na i obično približuje linearnom funkcijom njezinih varijabla.

Ako Y ima oblik $Y = cX_1^{p_1} X_2^{p_2} ... X_N^{p_N}$ ako su eksponenti p_i poznati pozitivni ili negativni brojevi koji imaju zanemarive nesigurnosti, sastavljena varijanca može se izraziti kao

$$[u_c(y)/y]^2 = \sum_{i=1}^{N} [p_i u(x_i)/x_i]^2 \tag{12}$$

II) Korelirane ulazne veličine

Jednadžba (10) i iz nje izvedene jednadžbe, kao što su (11) i (12), vrijede samo ako su ulazne veličine neovisne ili nekorelirane (slučajne varijable, a ne fizičke veličine za koje se podrazumijeva da su invarijante). Ako su neke od veličina X_i značajno korelirane, u račun se moraju uzeti i te korelacije.

Kada su ulazne veličine korelirane odgovarajući izraz za sastavljenu varijancu $u_c^2(y)$ pridruženu mjernom rezultatu glasi:

$$u_c^2(y) = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j} u(x_i, x_j) = \sum_{I=1}^{N} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 + 2 \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^{N} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j} u(x_i, x_j) \tag{13}$$

gdje su x_i i x_j procjene veličina X_i i X_j, a $u(x_i, x_j) = u(x_j, x_i)$ procijenjena je kovarijanca pridružena procjenama x_i i x_j. Stupanj korelacije između x_i i x_j opisuje se procijenjenim koeficijentom korelacije

$$r(x_i, x_j) = \frac{u(x_i, x_j)}{u(x_i) u(x_j)} \tag{14}$$

S pomoću korelacijskih koeficijenata, koji se lakše shvaćaju nego kovarijance, kovarijancijski član jednadžbe (10) može se napisati kao:

$$2 \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i-+1}^{N} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j} u(x_i) u(x_j) r(x_i, x_j) \tag{15}$$

Jednadžba 13 tada s pomoću jednadžbe 11b postaje:

$$u_c^2(y) = \sum_{i=1}^{N} c_i^2 u^2(x_i) + 2 \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i-+1}^{N} c_i c_j u(x_i) u(x_j) r(x_i, x_j) \tag{16}$$

2.2.4 Određivanje proširene nesigurnosti

Dodatna mjera nesigurnosti koja zadovoljava zahtjev za osiguranje kojeg intervala te vrste naziva se proširenom nesigurnošću i označuje s U. Proširena nesigurnost dobiva se množenjem složene standardne nesigurnosti $u_c(y)$ s faktorom proširenja k:

$$U = k \cdot u_c(y) \tag{17}$$

Mjerni rezultat tada se dogovorno izražava kao $Y = y \pm U$, čime se želi reći da je y najbolja procjena vrijednosti koja se može pripisati mjerenoj veličini Y i da je y - U do $y + U$ interval za koji se može očekivati da obuhvaća velik dio razdiobe vrijednosti koje bi se mogle razumno pripisati veličini Y. Takav interval također se izražava kao:

$$y - U \leq Y \leq y + U \tag{18}$$

3. REZULTATI MJERENJA

U ovoj usporedbi je sudjelovalo dvanaest laboratorija čiji si rezultati prikazani u tablici 3.1. Svaki je laboratorij mjerio mjerni prsten čija je nominalna veličina unutarnjeg promjera 200 mm. Mjerni prsten je prikazan na slici 4. Svi sudionici su koristili iste mjerne dodirne točke koje su označene na mjernom prstenu. Metode i mjerne tehnike mjerenja su različite međutim one nisu važne za ovu analizu.

Tablica 2. Rezultati mjerenja mjernog prstena

Laboratorij	Rezultati mjerenja mm	Odstupanje od nominalne vrijednosti mm	Proširena mjerna nesigurnost, U; k = 2, P = 95 % mm	Mjerna nesigurnost u, mm
L1	200,0037	0,0037	0,0016	0,0008
L2	200,00455	0,00455	0,0007	0,00035
L3	200,0035	0,0035	0,0012	0,0006
L4	200,007	0,007	0,0012	0,0006
L5	200,0052	0,0052	0,0006	0,0003
L6	200,0035	0,0035	0,0012	0,0006
L7	200,0034	0,0034	0,0010	0,0005
L8	200,0037	0,0037	0,0003	0,00015
L9	200,0033	0,0033	0,0007	0,00035
L10	200,0045	0,0045	0,0012	0,0006
L11	200,004	0,004	0,0009	0,00045
L12	200,0031	0,0031	0,0010	0,0005

Slika 4. Mjerni prsten unutarnjeg promjera 200 mm

4. ANALIZA REZULTATA MJERENJA

Postoji više metoda za usporedbu i analizu rezultata mjerenja. U ovom diplomskom radu biti će obrađene dvije. Prva na izračunu faktora slaganja i Birgeovog kriterija i druga s pomoću χ^2 testa. Za analizu i usporedbu mjerenja prve metode najvažnije je doći do rješenja referentne vrijednosti u razumnim i statističkim značajnim okvirima. Izračun referentne vrijednosti je kompliciran zbog više razloga i faktora. Prvo, jer je široka raznolikost instrumenata i metoda koje su se koristile što može rezultirati nedosljednošću rezultata. Također i sam predmet se može deformirati.

4.1. Faktor slaganja i Birgeov kriterij

U sklopu metode za usporedbu laboratorija koristi se koeficijent faktor slaganje E_n kao mjerilo dosljednosti individualnih rezultata u odnosu na referentnu vrijednost, te Birgeov kriterij R_b kao test cjelokupne statističke dosljednosti podataka. Faktor slaganja E_n računa se u svrhu ocjene kompatibilnosti rezultata mjerenja koji sudjeluje u usporednom mjerenju prema referentnom rezultatu. Računa se prema sljedećem izrazu:

$$E_\mathrm{n} = \frac{x_{lab} - x_{ref}}{\mathrm{k}\cdot\sqrt{u^2(x_{lab}) - u^2(x_{ref})}}\ ; k = 2 \tag{19}$$

Gdje su:

x_{lab} -rezultati mjerenja laboratorija učesnika

x_{ref} - rezultati referentne vrijednosti

$u(x_{lab})$ - mjerna nesigurnost laboratorija učesnika

$u(x_{ref})$ - mjerna nesigurnost referentne vrijednosti

k – faktor pokrivanja

Vrijednost E_n treba biti manja od 1 da bi se rezultat mogao smatrati kompatibilnim, odnosno što je vrijednost E_n bliža nuli, to je kompatibilnost tog rezultata bolja.

Vrijednost faktora slaganja je dobro izračunata ako je zadovoljen Birgeov kriterij. Ako nije zadovoljen, laboratorij s najvećim faktorom slaganja se izbacuje iz proračuna. To se ponavlja sve dok se ne zadovolji Birgeov kriterij. Birgeov kriterij se računa po prema izrazu:

$$R_B = \frac{u_{ext}}{u_{int}} \tag{20}$$

Gdje su u_{ext}:

$$u_{ext} = \sqrt{\frac{\sum_{\mathrm{l}=1}^{\mathrm{n}}\left[\frac{x_{\mathrm{l}}-x_{\mathrm{ref}}}{u(x_{\mathrm{l}})}\right]^2}{(n-1)\sum_{\mathrm{l}=1}^{\mathrm{n}}u^{-2}(x_{\mathrm{l}})}} \tag{21}$$

u_{int}:

$$u_{int} = 1/\sqrt{\sum_{\mathrm{l}=1}^{\mathrm{n}}u^{-2}(x_{\mathrm{l}})} \tag{22}$$

Da bi se zadovoljio Birgeov kriterij mora biti manji od sljedećeg izraza:

$$R_B < \sqrt{1+\sqrt{\frac{8}{n-1}}} \tag{23}$$

Kada se mjerenje isključi iz izračuna referentne vrijednosti i nije u korelaciji s istim E_n, onda se tom mjerenju E_n računa prema sljedećem izrazu:

$$E_{\mathrm{n}} = \frac{x_{lab}-x_{ref}}{\sqrt{u^2(x_{lab})+u^2(x_{ref})}} \tag{24}$$

Može se dogoditi da je dani rezultat isključen iz razmatranja i prilikom ponovnog proračuna može imati manji iznos od ostalih po ovoj formuli, međutim u praksi se ovakav slučaj rijetko pojavljuje pa je to zanemarivo.

Sljedeći korak ove metode je izračun referentne vrijednosti koji je najkompliciraniji dio cijele analize jer mora obuhvatiti sve rezultate mjerenja i dati referentnu vrijednost koja je statistički značajna. Za izračun postoji nekoliko metoda, a najčešća je izračun preko težinskih aritmetičkih sredina.

4.1.1 Rezultati analize s referentnom vrijednosti kao težinskom aritmetičkom sredinom

Težinska aritmetička sredina je slična običnoj aritmetičkoj sredini, ali umjesto da svaki podatak jednako doprinosi konačnom prosjeku , u izračunu težinske sredine neki podaci doprinose više od drugih. Ako svaki podatak ima istu težinu, težinska aritmetička sredina je jednaka aritmetičkoj sredini. Računanje referentne vrijednosti preko težinske aritmetičke sredine izvodi se prema sljedećim izrazima:

$$x_{\mathrm{ref}} = \frac{\sum_{i=1}^{n}u^{-2}(x_{\mathrm{i}})\cdot x_i}{\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}}u^{-2}(x_i)} \tag{25}$$

$$u(x_{\mathrm{ref}}) = \frac{1}{\sqrt{\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}} u^{-2}(x_{\mathrm{i}})}} \tag{26}$$

Gdje su:

x_{i} – rezultati mjerenja laboratorija učesnika

x_{ref} – rezultati referentne vrijednosti

$u(x_i)$ – mjerna nesigurnost laboratorija učesnika

u(x_{ref}) – mjerna nesigurnost referentne vrijednosti

Prvi korak izračuna je računanje referentne vrijednosti. U tablici 3. je prikazan rezultat izračuna aritmetičke sredine, težinske aritmetičke sredine i modificirane težinske aritmetičke sredine, te njihove standardne devijacije (mjerne nesigurnosti) . Aritmetička sredina je prikazana zbog usporedbe rezultata s težinskom aritmetičkom sredinom.

Formule za izračun aritmetičke sredine i njezine standardne devijacije:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} \tag{27}$$

$$u(\bar{x}) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})}{n-1}} \tag{28}$$

Gdje je:

x_i - rezultati mjerenja laboratorija učesnika

$\bar{x}$ – aritmetička sredina

$u(\bar{x})$ – standardna devijacija

Tablica 3. Rezultati izračuna referentne vrijednosti

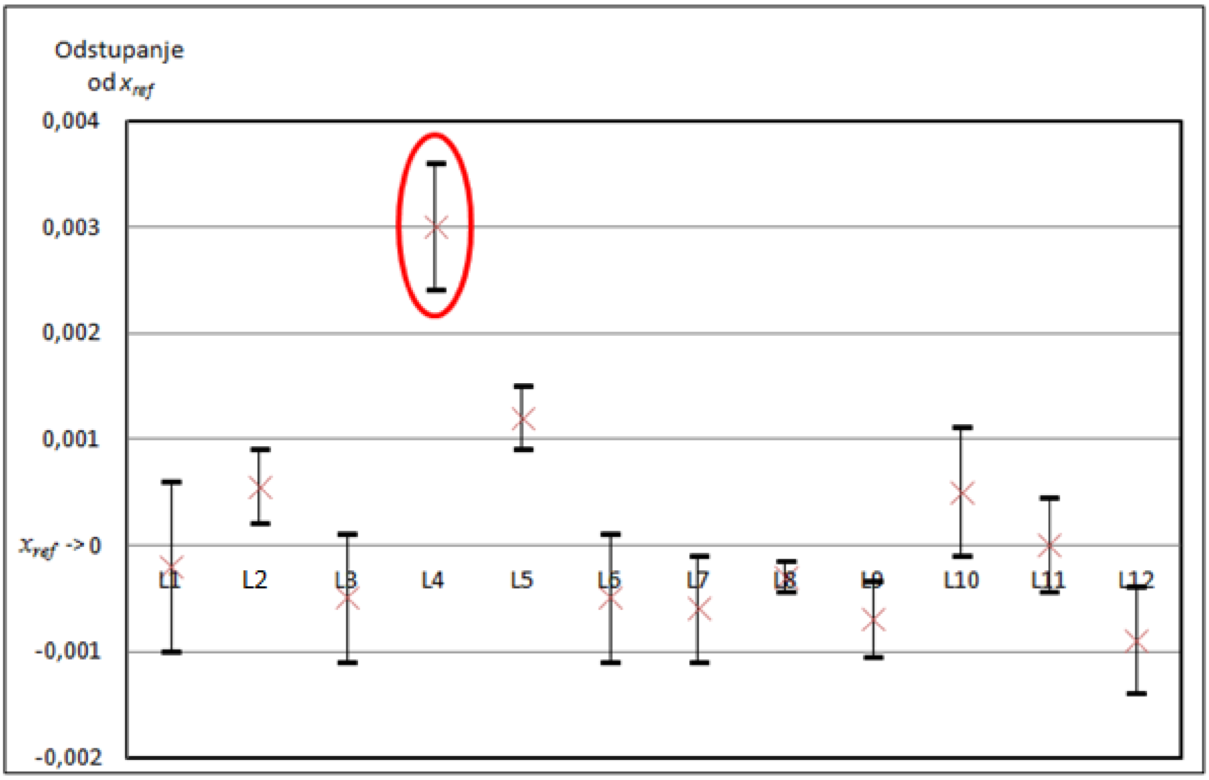
	Vrijednost, mm	Standardna devijacija, mm
Aritmetička sredina	200,0041	0,0034
Težinska aritmetička sredina	200,004	0,0001
Modificirana težinska aritmetička sredina	200,0037	0,00011

U sljedećoj tablici 4. je prikazane su vrijednosti faktora slaganja i Birgeov kriterij. Iz tablice se može primijetiti da je Birgeov kriterij veći od računske vrijednosti i zbog toga se odlučuje na izbacivanje jednog rezultata. Iz daljnje analize izbacuje se laboratorij 4 (L4) zbog najvećeg faktora slaganja.

Tablica 4. Rezultati faktora slaganja i referentne vrijednosti (I. korak)

Laboratorij:	*En*
L1	-0,18
L2	0,83
L3	-0,42
L4	2,47
L5	1,91
L6	-0,42
L7	-0,60
L8	-1,32
L9	-1,03
L10	0,43
L11	0,009
L12	-0,91
x_{ref}, mm	200,004
$u(x_{ref})$, mm	0,0001
R_b	2,303
R_b<	1,361

U slici 5. je prikazan grafički prikaz rezultata mjerenja s izračunatom referentnom vrijednosti nakon prvog koraka.



Slika 5. Grafički prikaz rezultata mjerenja mjernog prstena 200 mm (I. korak)

U slici 5. zaokružen je rezultat laboratorija 4 koji najviše odstupa od ostalih rezultata i nakon prvog koraka izbačen iz daljnje analize.

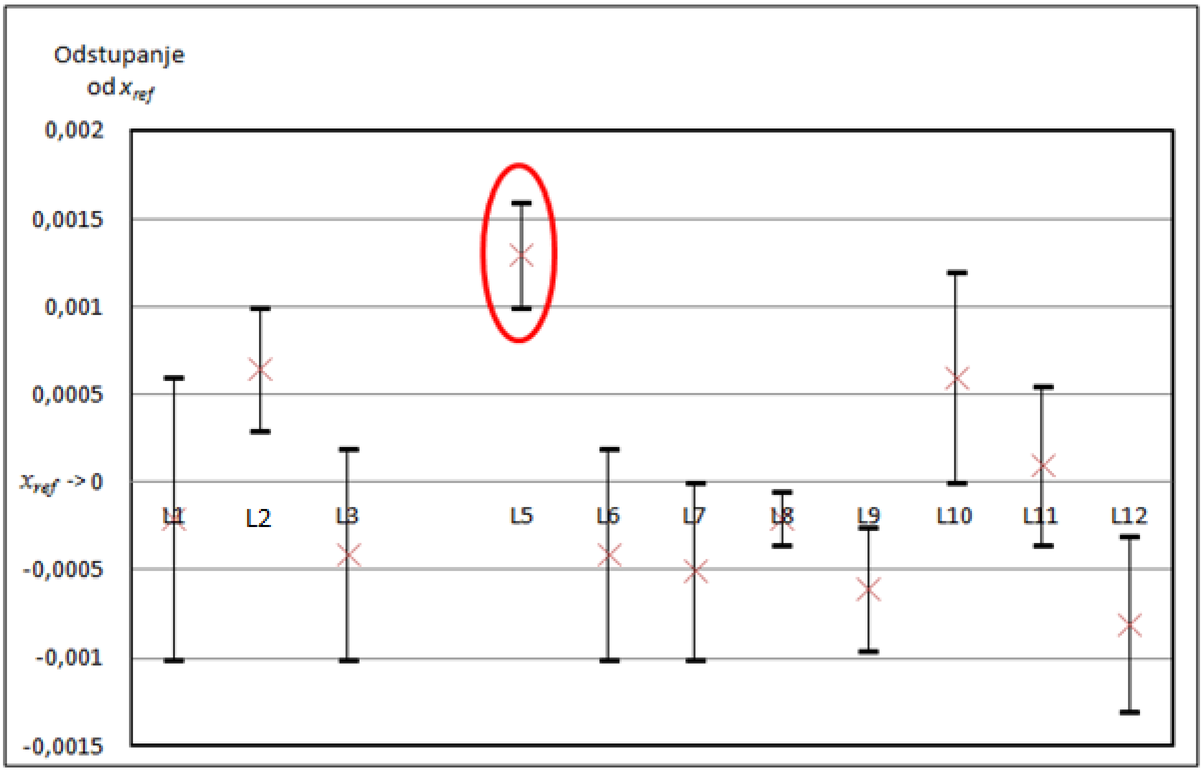
U drugom koraku opet se računala referentna vrijednost zbog izbacivanja laboratorija 4 iz analize. To je sada modificirana težinska aritmetička sredina koja je prikazana u tablici 5. zajedno s vrijednostima faktora slaganja i Birgeovog kriterija.

Tablica 5. Rezultati faktora slaganja i referentne vrijednosti (II. korak)

Laboratorij:	*En*
L1	-0,13
L“	0,96
L3	-0,34
L4	2,54
L5	2,23
L6	-0,34
L7	-0,51
L8	-0,93
L9	-0,9
L10	0,5
L11	0,11
L12	-0,82
x_{ref}, mm	200,0039
$u(x_{\mathrm{ref}})$, mm	0,0001
R_b	1,8028
R_b<	1,376

Iz same tablice primjećuje se da je računska vrijednost Birgeovog kriterija manja od izračunate i zbog toga rezultati još uvijek nisu statistički dosljedni za usporedbu. Najveća vrijednost faktora slaganja je kod laboratorija 5 (L5) i izbacuje se iz daljnje analize.

U sljedećoj slici (Slika 6.), prikazan je grafički prikaz rezultata nakon drugog kruga izračuna referentne vrijednosti. Označen je rezultat laboratorija 5 koji najviše odstupa i zbog najveće vrijednosti faktora slaganja izbačen je iz daljnje analize.



Slika 6. Grafički prikaz rezultata mjerenja mjernog prstena 200 mm (II. korak)

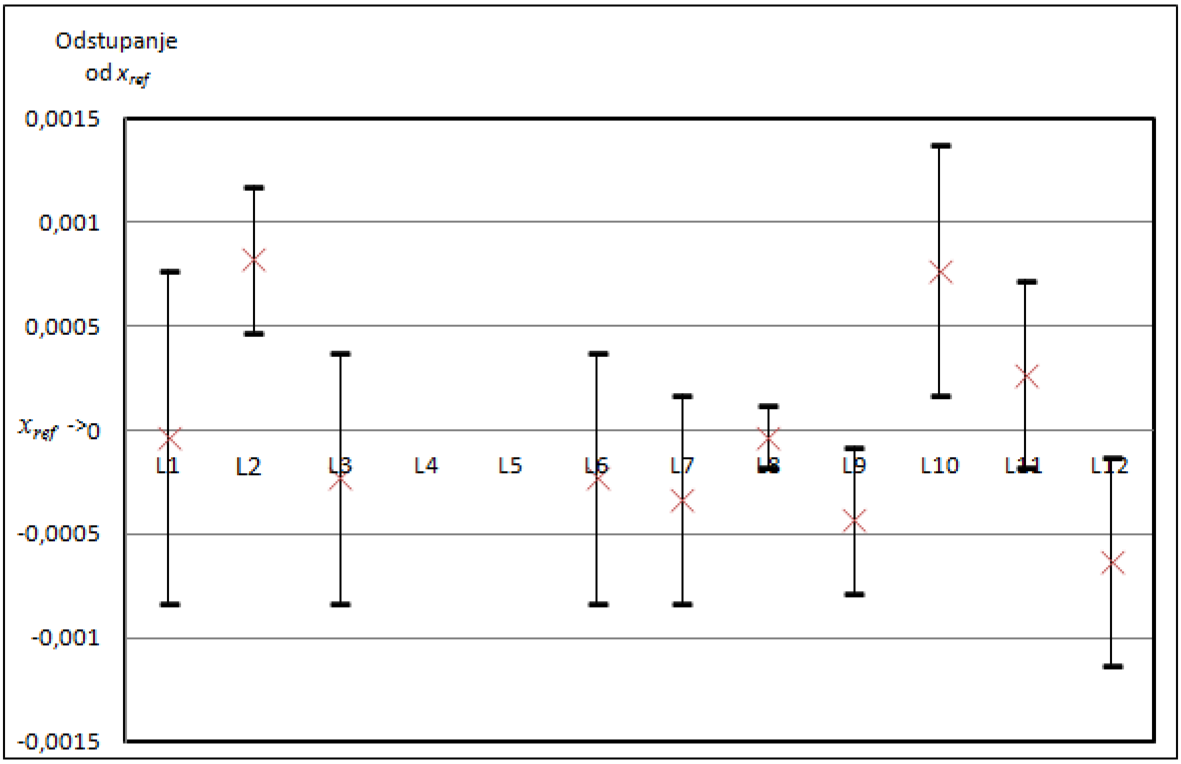
Sada slijedi sljedeći korak gdje se ponovno računa referentna vrijednost, ali bez mjerenja laboratorija 4 i 5. U tablici 6. prikazane su vrijednosti faktora slaganja i Birgeovog kriterija za treći korak. Također je prikazana i vrijednost modificirane težinske aritmetičke sredine koja je referentna za treći korak analize.

Tablica 6. Rezultati faktora slaganja i referentne vrijednosti (III. korak)

Laboratorij:	*En*
L1	-0,02
L2	1,23
L3	-0,196
L4	2,68
L5	2,3
L6	-0,196
L7	-0,34
L8	-0,155
L9	-0,65
L10	0,65
L11	0,31
L12	-0,65
x_{ref}, mm	200,0037
$u(x_{ref})$, mm	0,00011
R_b	1,1236
R_b<	1,393

Iz tablice 6. je vidljivo da vrijednost Birgeovog koeficijenta je manja od računske vrijednosti i zbog toga su rezultati statistički dosljedni. Vrijednost modificirane težinske aritmetičke sredine je konačna i to je referentna vrijednost koja je upisana i u tablici 3.

U slici 7. je prikazan grafički prikaz rezultata mjerenja mjernog prstena u trećem, konačnom koraku.



Slika 7. Grafički prikaz rezultata mjerenja mjernog prstena 200 mm (III. korak)

4.2. Totalni medijan

Postoji mnogo procjenitelja koji se koriste za opisivanje neke pojave u mjeriteljstvu. Neki se više, a neki manje koriste. Primjeri kao aritmetička sredina, medijan, težinska sredina su već odavno poznate i neke već i opisane. Svaki procjenitelj ima svoje osobine koje su prikladne za određenu vrstu problema. Također, svaki ima i određenu nesigurnost koja mjeri koliko se možemo osloniti na dotični rezultat, te pokrivanje nekog intervala u propisanoj razini povjerenja. Poželjna svojstva procjenitelja su robusnost, tj. da je snažan, ekonomičnost i učinkovitost.

Totalni medijan se definira kao matematičko očekivanje medijana prema bootstrap metodi. Bootstrap metoda je jedna vrsta uzorkovanja. Specifična je zbog svojstva zamjene, tj. svaki podatak nakon što se odabere i uzorkuje ponovo se vraća u skup i može se ponovno izvući. Ova metoda se temelji na ponavljanju takvog procesa i preko 1000 puta. Naravno, puno je zgodnije to odrađivati na računalu. Nakon što se iz jednog skupa podataka dobilo 1000 novih skupova uzoraka računa se određeni procjenitelj za svaki novi skup. Metoda je idealna ako je originalni skup podataka siromašan podacima i teško je izvršiti bilo kakvu analizu iz njega. Očekuje se da će veći broj novih vrijednosti u uzorcima biti tamo gdje je veća gustoća vrijednosti u originalnom skupu podataka. Svaki podatak dakle ima u ovom slučaju veću ili manju vjerojatnost da se izvuče.

Formula pomoću koje se izračunava totalni medijan glasi:

$$T = \sum_{i=1}^{n} p_i \, x_i \tag{29}$$

gdje je:

p_i – vjerojatnost ili relativna frekvencija za uzorak u skupu podataka n

x_i – uzorak u skupu podataka n (u ovom slučaju rezultat mjerenja)

Ako uzmemo za primjer skup podataka veličine n = 3 [1,2,3]. Bootstrap metodom imati ćemo 3^3 = 27 različitih vrsta uzoraka: (1,1,1), (1,1,2), (1,2,1),…(3,3,3). Vjerojatnost da se dobije jedna vrsta uzoraka je 1/27. Dakle, vjerojatnost da medijan x_m= 1 je p_1 = 7/27, za x_m=2 je p_2 = 13/27 i za x_m=3 je p_3= 7/27. Lako je dobit vrijednost p_i iz malog skupa podataka. Problem je pri izračunu npr. za n = 10. Tada imamo 10^{10} različitih mogućnosti uzoraka. Općenito se ne savjetuje računanje za velik broj uzoraka zbog pogreške koja može nastati.

Za izračun vjerojatnosti bilo kojeg broja uzoraka koristi se formula:

n – neparan broj

$$P\big(X_{(j)} = x_i\big) = \sum_{k=j}^{n} \binom{n}{k} [P_i^k\,(1-P_i)^{n-k} - P_{i-1}^k (1-P_{i-1})^{n-k} \tag{30}$$

n – paran broj

$$P\big(X_{(j)} = x_i\big) = \sum_{k=j}^{n} \frac{1}{2}\,\binom{n}{k} [P_i^k\,(1-P_i)^{n-k} - P_{i-1}^k (1-P_{i-1})^{n-k} \tag{31}$$

U sljedećim tablicama, tablica 7. i tablica 8. su prikazani rezultati vjerojatnosti za neparni, odnosno parni broj podataka nekog skupa *n*.

Tablica 7. Vjerojatnosti za totalni medijan (neparan broj podataka)

i	$P_{i,3}$	$p_{i,5}$	$p_{i,7}$	$p_{i,9}$	$p_{i,11}$	$p_{i,13}$	$p_{i,15}$	$p_{i,17}$
1	0,2592	0,05792	0,01500	0,00145	0,00017	0,00002	0,00000	0,00000
2	0,4818	0,25952	0,09812	0,02892	0,00703	0,00146	0,00027	0,00004
3	-	0,36512	0,23863	0,11447	0,04404	0,01423	0,00397	0,00098
4	-	-	0,30620	0,22066	0,12150	0,05495	0,02121	0,00716
5	-	-	-	0,26899	0,20588	0,12427	0,06278	0,02744
6	-	-	-	-	0,24274	0,19361	0,12487	0,06844
7	-	-	-	-	-	0,22294	0,18324	0,12429
8	-	-	-	-	-	-	0,20732	0,17435
9	-	-	-	-	-	-	-	0,19458

Tablica 8. Vjerojatnosti za totalni medijan (paran broj podataka)

i	$p_{i,4}$	$p_{i,6}$	$p_{i,8}$	$p_{i,10}$	$p_{i,12}$	$p_{i,14}$	$p_{i,16}$
1	0,15625	0,03549	0,00624	0,00089	0,00010	0,00001	0,00000
2	0,34375	0,17438	0,06432	0,01869	0,00450	0,00093	0,00017
3	-	0,29012	0,17246	0,07923	0,02972	0,00944	0,00261
4	-	-	0,25698	0,16776	0,08776	0,03845	0,01453
5	-	-	-	0,23343	0,16243	0,09287	0,04529
6	-	-	-	-	0,21548	0,15712	0,09594
7	-	-	-	-	-	0,20118	0,15205
8	-	-	-	-	-	-	0,18942

Vjerojatnosti (p_i) koje se dodjeljuju nekom skupu se ponašaju simetrično, dakle prvi i zadnji član skupa imaju istu vjerojatnost. Najveću ima ona vrijednost koja je klasični medijan, a to za neparne znači onaj koji je na (n + 1) / 2 mjestu. Kod parnog broja podataka i n/2 i n/2+1 imaju istu najveću vjerojatnost.

4.2.1 *Rezultati analize s totalnim medijanom kao referentnom vrijednosti*

U ovom dijelu analize koristit će se totalni medijan kao referentna vrijednost jer je totalni medijan snažan i učinkovit kao procjenitelj. Formula za izračunavanje totalnog medijana glasi:

$$x_{med} = \sum_{i=1}^{n} p_{i,n} x_i \tag{32}$$

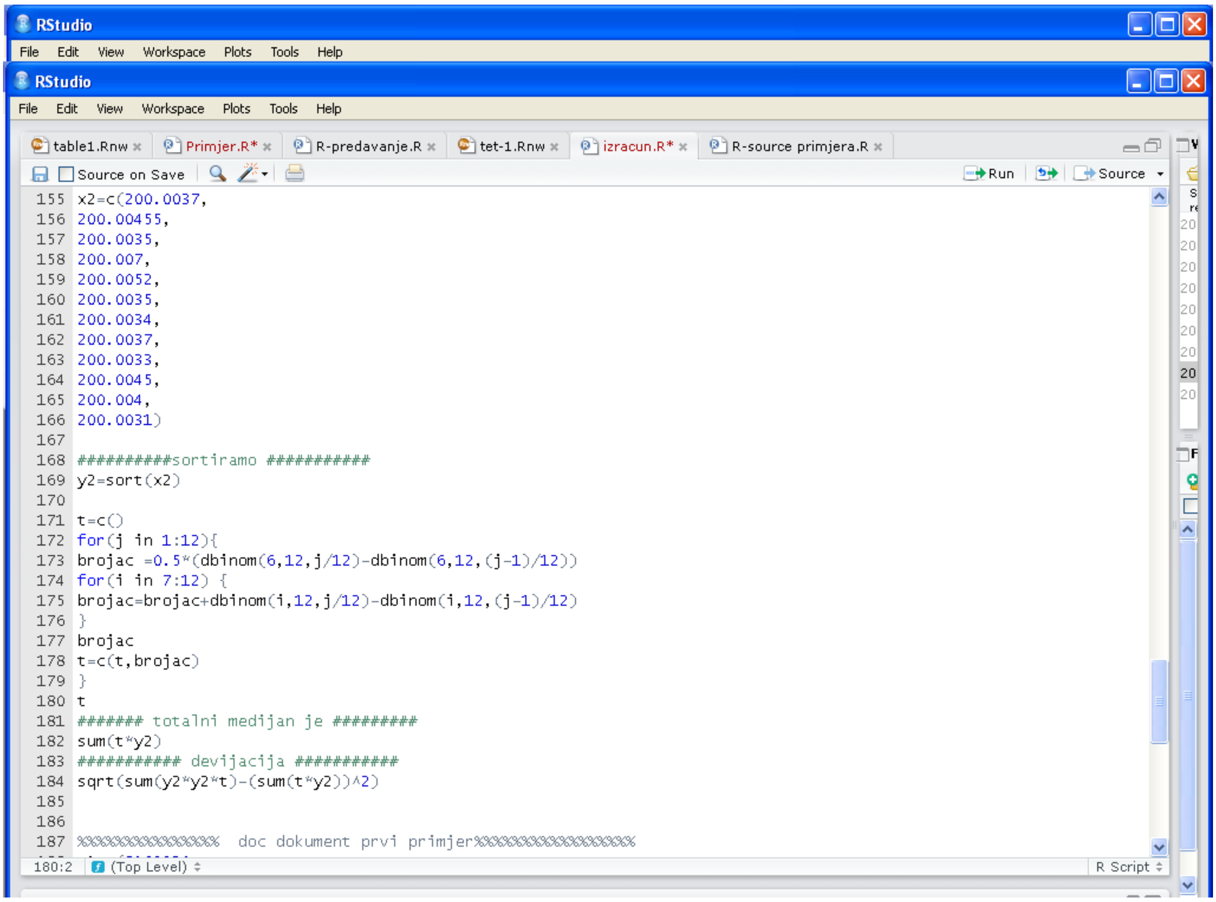
i formula za standardnu nesigurnost totalnog medijana:

$$u(x_{med}) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} p_{i,n} (x_i - x_{med})^2} \tag{33}$$

U sljedećoj tablici 9. su prikazani rezultat totalnog medijana i njegove nesigurnosti s odgovarajućim vjerojatnostima i laboratorijskim rezultatima. Vjerojatnost je izračunata u R programskom paketu pomoću petlje koja je prikazana u slici 8. Iako smo imali podatke vjerojatnosti iz tablice 8., zbog većeg broja podataka u skupu (*n* = 12) računalo se pomoću R-a zbog dobivenog rezultata s više decimalnih mjesta što je bitno za smanjenje pogreške proračuna. Rezultati mjerenja su poredani od manjeg prema većem zbog jednostavnosti pregleda.

Tablica 9. Rezultat totalnog medijana i njegove nesigurnosti

Rezultati mjerenja	$p_{i,12}$	Totalni medijan x_{med} mm	Nesigurnost $u(x_{med})$ mm
200,0031	0,0001069483	200,0038	0,00033
200,0033	0,0045018432		
200,0034	0,0297187155		
200,0034	0,0877575410		
200,0035	0,1624315144		
200,0037	0,2154834375		
200,0037	0,2154834375		
200,004	0,1624315144		
200,0045	0,0877575410		
200,00455	0,0297187155		
200,0052	0,0045018432		
200,007	0,0001069483		



Slika 8. Primjer u R statističkom programu

U tablici 10. su prikazani rezultati faktora slaganja i Birgeov kriterij za laboratorije uz referentnu vrijednost kao totalni medijan.

Tablica 10. Rezultati faktora slaganja uz totalni medijan kao x_{ref} (I. korak)

Laboratorij:	*En*
L1	-0,069
L2	3,215
L3	-0,299
L4	3,193
L5	5,092
L6	-0,299
L7	-0,532
L8	-0,17
L9	-2,144
L10	0,698
L11	0,327
L12	-0,932
R_b	2,371
R_b<	1,361
x_{ref} = 200,0038	$u(x_{ref})$ = 0,00033

Iz tablice 10. se može primijetiti da je računski R_b veći od zadanog i zbog toga zaključujemo da rezultati među laboratorijima nisu dosljedni i mora se izbaciti jedno mjerenje u sljedećem krugu. Najveći koeficijent faktora slaganja ima L5 i njega izbacujemo.

U tablici 11. je prikazani su rezultati drugog koraka analize nakon izbacivanja L5. Totalni medijan i njegova nesigurnost su izračunati kao i u prvom koraku.

Tablica 11. Rezultati faktora slaganja uz totalni medijan kao x_{ref} (II. korak)

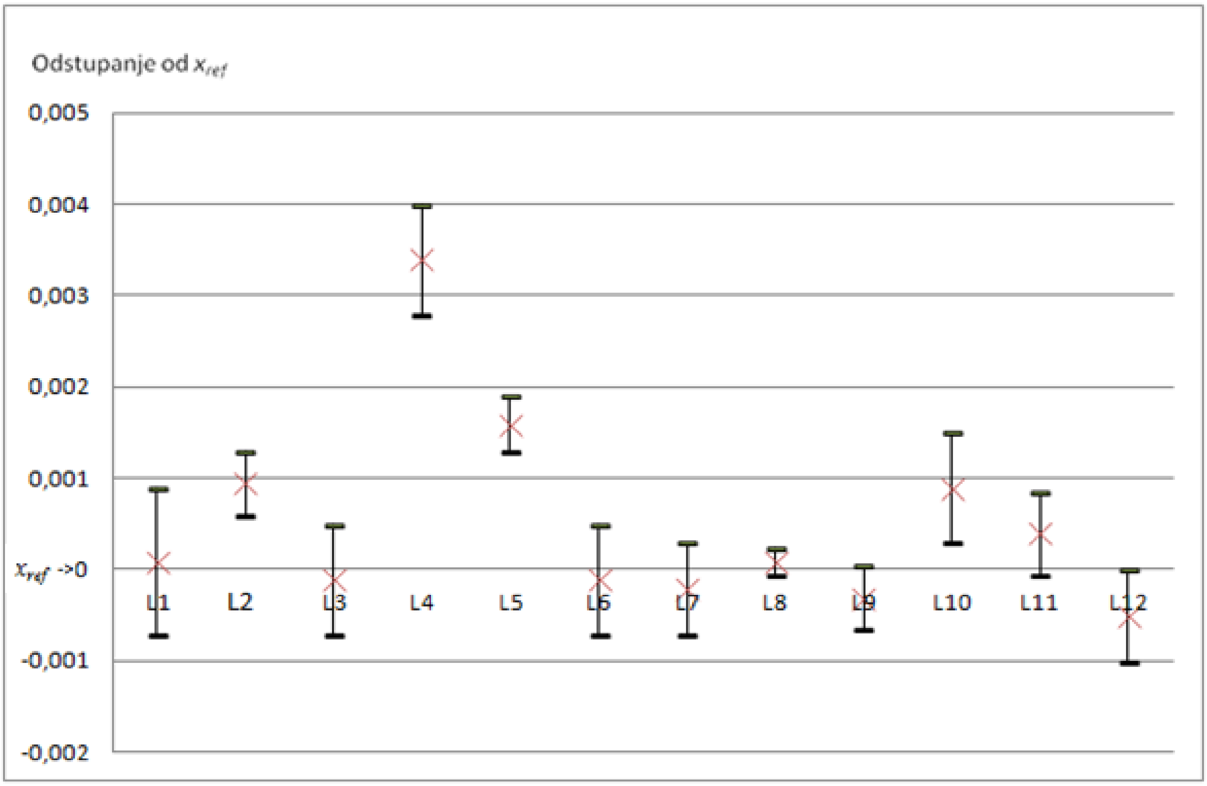
Laboratorij:	*En*
L1	0,01
L2	1,891
L3	-0,171
L4	3,079
L5	1,894
L6	-0,171
L7	-0,335
L8	0,0355
L9	-0,84
L10	0,757
L11	0,434
L12	-0,689
R_b	1,95
$R_b <$	1,376
x_{ref} = 200,0037	$u(x_{ref})$ = 0,00026

Rezultati pokazuju da je računski R_b još uvijek veći od zadanog i potrebno je izbaciti još jedan rezultat s najvećim faktorom slaganja što je u ovom slučaju L4. U sljedećoj tablici 12. je prikazan treći korak analize s novim totalnim medijanom kao referentnom vrijednosti.

Tablica 12. Rezultati faktora slaganja uz totalni medijan kao x_{ref} (III. korak)

Laboratorij:	*En*
L1	0,058
L2	1,705
L3	-0,099
L4	2,657
L5	2,15
L6	-0,099
L7	-0,234
L8	0,287
L9	-0,564
L10	0,794
L11	0,493
L12	-0,566
R_b	1,07
$R_b <$	1,393
x_{ref} = 200,0036	$u(x_{ref})$ = 0,00021

Iz tablice 12. se vidi da je vrijednost računskog R_b manje od zadanog pa zaključujemo da su rezultati statistički dosljedni. U slici 9. prikazan je grafički prikaz rezultata mjerenja s referentnom vrijednosti kao totalni medijan. Također su prikazani i laboratoriji koji su izbačeni.



Slika 9. Grafički prikaz rezultata mjerenja, totalni medijan kao referentna vrijednost

4.2.2 Rezultati analize s kombiniranom referentnom vrijednosti

Kombinirana referentna vrijednost se računa kao prosjek između modificirane težinske srednje vrijednosti i totalnog medijana. Formula za $x_{ref.}$ glasi:

$$x_{ref} = \frac{x_w + x_t}{2} \tag{34}$$

gdje je:

x_w – modificirana težinska sredina

x_t – totalni medijan

Mjerna nesigurnost se računa malo drugačije, zbog dosljednosti jer se može dogoditi da je vrijednost nesigurnosti modificirane težine znatno manja nego kod totalnog medijana. Za nesigurnost referentne vrijednosti koristimo kombinaciju dvije nesigurnosti i to ovom formulom:

$$u_{ref} = \sqrt{\frac{u_w^2+u_t^2}{2}} \tag{35}$$

gdje su:

u_w – nesigurnost modificirane težinske sredine
u_t – nesigurnost totalnog medijana

U sljedećoj tablici 13. su prikazani rezultati za kombiniranu referentnu vrijednost uz vrijednosti modificirane težinske sredine i totalnog medijana.

Tablica 13. Rezultati proračuna kombinirane referentne vrijednosti

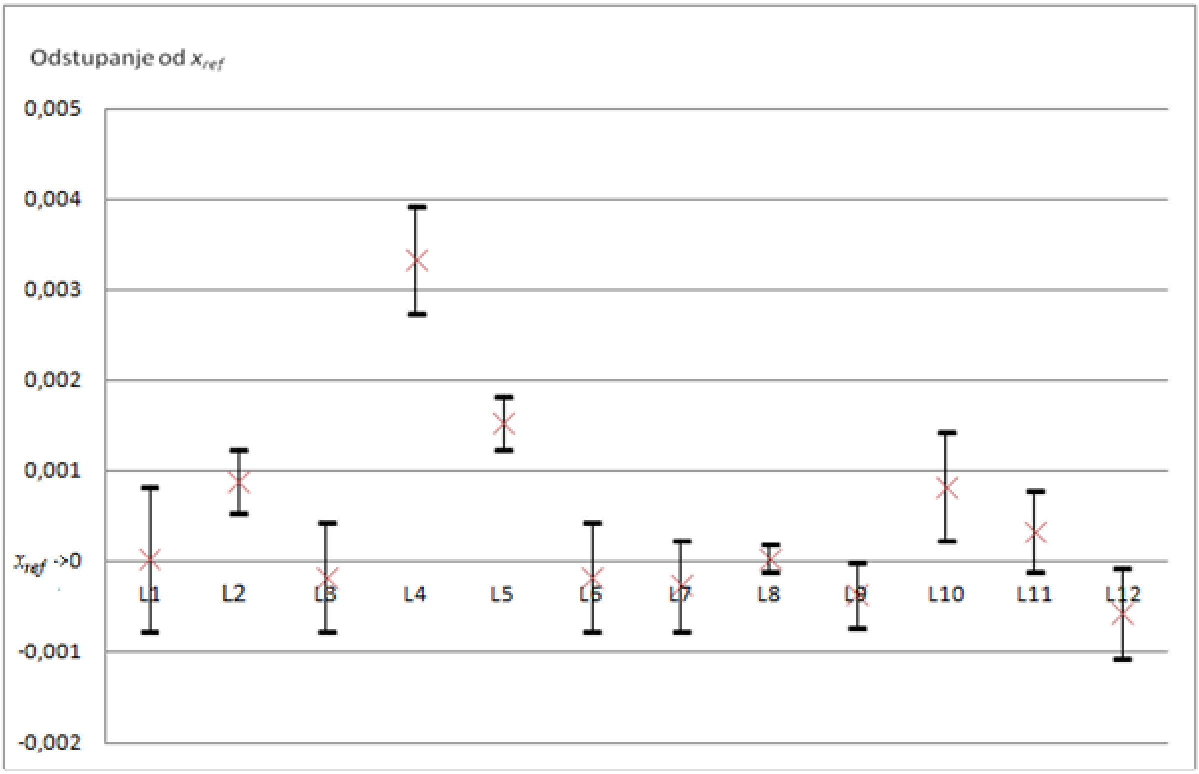
	Modificirana težinska sredina mm	**Totalni medijan, mm**	**Kombinirana referentna vrijednost, mm**
$x_{ref.}$	200,0037	200,0036	200,0037
u_{ref}	0,00011	0,0002	0,00017

U tablici 14. su prikazani rezultati faktora slaganja uz kombiniranu referentnu vrijednost. U proračun za Birgeov kriterij se nisu koristili laboratoriji L4 i L5 jer su oni bili izbačeni kod obje metode. Rezultati faktora slaganja za ta dva laboratorija su označeni zvjezdicama u tablici.

Tablica 14. Rezultati faktora slaganja uz kombiniranu referentnu vrijednost

Laboratorij:	*En*
L1	0,018
L2	1,439
L3	-0,149
L4	2,894*
L5	3,102*
L6	-0,149
L7	-0,289
L8	0,174
L9	-0,608
L10	0,72
L11	0,395
L12	-0,608
R_b	1,03
R_b <	1,393
$\boldsymbol{x_{ref}}$ = 200,0037	$\boldsymbol{u(x_{ref})}$ = 0,00017

U slici 10. su prikazani grafički rezultati mjerenja gdje je referentna vrijednost kombinirana s totalnim medijanom i modificiranom težinskom sredinom.



Slika 10. Grafički prikaz rezultata mjerenja s kombiniranom referentno vrijednosti

4.3. Hi kvadrat (χ^2) test

Postupak nazvan hi-kvadrat test se upotrebljava u većini slučajeva ako se radi o kvalitativnim podacima ili ako tim podacima distribucija značajno odstupa od normalne u ovom slučaju od referentne.

Hi kvadrat test je vrlo praktičan test koji može osobito poslužiti onda kad želimo utvrditi da li neke dobivene (opažene) frekvencije odstupaju od frekvencija koje bismo očekivali pod određenom hipotezom. Kod ovog testa katkada tražimo postoji li povezanost između dvije varijable i on pokazuje vjerojatnost povezanosti. Možemo pretpostaviti da neka teorijska raspodjela dobro opisuje opaženu raspodjelu frekvencija. Da bismo tu pretpostavku (hipotezu) provjerili, primjenjujemo ovaj test. Rezultati dobiveni u uzorcima ne podudaraju se uvijek s teoretskim rezultatima koji se očekuju prema pravilima vjerojatnosti. Na primjer iako prema teoriji očekujemo da kad god bacimo valjan novčić 100 puta dobijemo 50 "glava" i 50 "pisama", rijetko kada se dobije ovakav rezultat.

Formula za izračun Hi kvadrata je:

$$\chi^2 = \frac{(x_1 - KCRV)^2}{u^2(x_1)} + \cdots + \frac{(x_N - KCRV)^2}{u^2(x_N)} \tag{36a}$$

Odnosno:

$$\chi^2 = \sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}} \left[\frac{(x_i - KCRV)^2}{u^2(x_i)}\right] \tag{36b}$$

Gdje su:

x_{i} – rezultati mjerenja laboratorija učesnika

$u(x_i)$ – mjerna nesigurnost laboratorija učesnika

$KCRV$ – key comparison reference value koji se računa prema izrazu:

$$KCRV = \frac{\frac{x_1}{u^2(x_1)} + \cdots + \frac{x_N}{u^2(x_N)}}{\frac{1}{u^2(x_1)} + \cdots + \frac{1}{u^2(x_N)}} \tag{37a}$$

Odnosno:

$$KCRV = \frac{\Sigma\left(\frac{x_{\mathrm{i}}}{u_{\mathrm{i}}^2}\right)}{\Sigma\left(\frac{1}{u_{\mathrm{i}}^2}\right)} \tag{37b}$$

Iz jednadžbe (37b) se može vidjeti da je formula za $KCRV$ ista kao i za izračun referentne vrijednosti s pomoću težinske aritmetičke težine.

Ako je razlika između empiričkih (x_i) i teoretskih ($KCRV$) rezultata nije prevelika, tada i pripadni χ^2 neće biti prevelik. No ako su razlike veće, bit će veći i χ^2. Ustanovimo li da je χ^2

suviše velik, odnosno veći od tablične vrijednosti, odbacujemo hipotezu H kao neispravnu. Kaže se da je χ^2 signifikantan. Dakle, postupak se sastoji od izračunavanja prvo *KCRV* formule, a potom izračuna χ^2. Nakon toga se uz određeni stupanj slobode k očitava iz tablice VII (u prilogu) vjerojatnost. Ovisi o odnosu tablične vrijednosti i izračunate vrijednosti χ^2 odlučujemo o prihvaćanju ili odbacivanju hipoteze.

4.3.1 Rezultati analize s pomoću Hi – kvadrat testa

U sljedećoj tablici 15. dani su rezultati proračuna za Hi – kvadrat test.

Tablica 15. Rezultati proračuna Hi – kvadrat testa (I. korak)

Lab:	Rezultati za nominalni promjer 200 mm	Mjerna nesigurnost (u)	x/u^2	$1/u^2$	*KCRV*	$[(x\text{-}KCRV)^2]/u^2$	Hi-kvadrat test
L1	200,0037	0,0008	312505781	1562500	200,004	0,1335	58,3676
L2	200,00455	0,00035	1,633E+09	8163265		2,5388	
L3	200,0035	0,0006	555565278	2777778		0,6733	
L4	200,007	0,0006	555575000	2777778		25,1282	
L5	200,0052	0,0003	2,222E+09	11111111		16,2055	
L6	200,0035	0,0006	555565278	2777778		0,6733	
L7	200,0034	0,0005	800013600	4000000		1,4034	
L8	200,0037	0,00015	8,889E+09	44444444		3,7978	
L9	200,0033	0,00035	1,633E+09	8163265		3,9127	
L10	200,0045	0,0006	555568056	2777778		0,7159	
L11	200,004	0,00045	987674074	4938272		0,0003	
L12	200,0031	0,0005	800012400	4000000		3,1849	

Granična vrijednost za hi-kvadrat s 11 stupnjeva slobode i P = 95% je 19,675 što smo pronašli iz tablice VII koja se nalazi u prilogu. Pošto je $\chi^2_{rač.} > \chi^2_{tab.,}$ možemo zaključiti odbacujemo hipotezu i zaključujemo da se dobiveni rezultati značajno razlikuju od onih očekivanih - referente vrijednosti (*KCRV*). Dakle, χ^2 je signifikantan.

Za poboljšanje računske vrijednosti hi – kvadrat testa potrebno je izbaciti u sljedećem koraku laboratorij s najvećom hi-kvadrat testa i ponovno napraviti cijeli postupak. U ovom slučaju izbacujemo L4 jer ima najveći hi kvadrat(χ^2 = 25,128)

U sljedećoj tablici 16. prikazane su vrijednosti za proračun hi-kvadrat testa bez izbačenog L4.

Tablica 16. Rezultati proračuna Hi – kvadrat testa (II. korak)

Lab:	Rezultati za nominalni promjer 200 mm	Mjerna nesigurnost (u)	x/u^2	$1/u^2$	*KCRV*	$[(x\text{-}KCRV)^2]/u^2$	Hi-kvadrat test
L1	200,0037	0,0008	312505781	1562500	200,0039	0,0651	32,5024
L2	200,00455	0,00035	1,633E+09	8163265		3,4055	
L3	200,0035	0,0006	555565278	2777778		0,4536	
L5	200,0052	0,0003	2,222E+09	11111111		18,6592	
L6	200,0035	0,0006	555565278	2777778		0,4536	
L7	200,0034	0,0005	800013600	4000000		1,0165	
L8	200,0037	0,00015	8,889E+09	44444444		1,8516	
L9	200,0033	0,00035	1,633E+09	8163265		2,9792	
L10	200,0045	0,0006	555568056	2777778		0,9863	
L11	200,004	0,00045	987674074	4938272		0,0454	
L12	200,0031	0,0005	800012400	4000000		2,5864	

Rezultat Hi-kvadrat testa za ovaj korak je 32,5024. Iz tablice VII $\chi^2_{tab.}$ za 10 stupnjeva slobode i P = 95% je 18,307. Možemo zaključiti da je $\chi^2_{rač.} > \chi^2_{tab.}$, odnosno da je χ^2 signifikantan. Dakle, odbacujemo hipotezu i zaključujemo da se dobiveni rezultati razlikuju od očekivanih.

Kao i kod prvog koraka slijedi nam izbacivanje jednog laboratorija iz proračuna. Izbacujemo onog koji ima najveće odstupanje od referentne vrijednosti, odnosno onog koji ima najveću vrijednost χ^2. Najveću vrijednost ima L5 i on se izbacuje iz sljedećeg koraka.

U tablici 17. su prikazani rezultati proračuna III. koraka hi – kvadrat testa.

Tablica 17. Rezultati proračuna Hi – kvadrat testa (III. korak)

Lab:	Rezultati za nominalni promjer 200 mm	Mjerna nesigurnost (u)	x/u^2	$1/u^2$	*KCRV*	$[(x\text{-}KCRV)^2]/u^2$	Hi-kvadrat test
L1	200,0037	0,0008	312505781	1562500	200,0037	0,0016	11,3635
L2	200,00455	0,00035	1,633E+09	8163265		5,4637	
L3	200,0035	0,0006	555565278	2777778		0,1494	
L6	200,0035	0,0006	555565278	2777778		0,1494	
L7	200,0034	0,0005	800013600	4000000		0,4406	
L8	200,0037	0,00015	8,889E+09	44444444		0,0452	
L9	200,0033	0,00035	1,633E+09	8163265		1,5227	
L10	200,0045	0,0006	555568056	2777778		1,6389	
L11	200,004	0,00045	987674074	4938272		0,355	
L12	200,0031	0,0005	800012400	4000000		1,5971	

Iz tablice VII, $\chi^2_{tab.}$ za 9 stupnjeva slobode uz P = 95% iznosi 16,919 i veći je od $\chi^2_{rač.}$ Zbog toga prihvaćamo hipotezu i zaključujemo da se dobiveni rezultati ne razlikuju statistički značajno od onih koji su očekivani vrijednošću *KCRV*-a.

5. USPOREDBA METODA ANALIZE REZULTATA

U analizi rezultata koristile su se dvije metode. Prva je bila kombinacija Birgovog kriterija kao mjere dosljednosti i faktora slaganja kao procjenu mjerenja u odnosu na referentnu vrijednost. Vrlo je bitno kod te metode izabrati dobru referentnu vrijednost koja će najbolje obuhvatiti sve podatke i omogućiti poštenu procjenu. Za izračun referentne vrijednosti korišteni su različiti procjenitelji kao npr. težinska aritmetička sredina koja se nakon izbacivanje određenog broja rezultata modificirala i naziva se modificirana težinska sredina, totalni medijan te kombinacija ta dva procjenitelja, takozvana kombinirana referentna vrijednost.

Zajedničko svim procjeniteljima što su im zajednički izbačeni laboratoriji, odnosno njihova mjerenja. Dakle, sva tri procjenitelja su izbacila ona mjerenja koja su najviše odstupala od većine. Jedina razlika je što se prilikom korištenja totalnog medijana kao procjenitelja prvi izbačeno mjerenje je bilo od laboratorija 5, dok je kod ostalih prvo bilo izbačeno mjerenje laboratorija 4. Može se zaključiti da nema velike razlike između procjenitelja jer su rezultati usporedbenih mjerenja pokazali jednakim.

Pošto je svakom procjenitelju bilo potrebno tri koraka da podaci se pokažu dosljednim, tj. tri koraka da se zadovolji Birgeov kriterij u tablici 18. su prikazani podaci za Birgeov kriterij za sva tri procjenitelja nakon tri koraka.

Tablica 18. Vrijednost R_b za tri procjenitelja

Procjenitelji:	**Modificirana težinska sredina**	**Totalni medijan**	**Kombinirana referentna vrijednost**
x_{ref}	200,0037	200,0036	200,00367
R_b	1,1236	1,07	1,03

Iz tablice 17. se može primijetiti da najmanja vrijednost R_b je kod kombinirane referentne vrijednosti i može se dakle zaključiti da podaci su najdosljedniji i najbolje ih opisuje kombinacija modificirane težinske sredine i totalnog medijana kao referentne vrijednosti.

Faktor slaganja nam može dati procjenu kvalitete mjerenja nekog laboratorija. Što je faktor manji to je rezultat mjerenja laboratorija bolji. Najmanji faktor slaganja, a time i najbolje mjerenje u slučaju kod sva tri procjenitelja je imao laboratorij 1. Raspored ostalih laboratorija je dosta sličan kod svih procjenitelja što se može vidjeti u tablici 19. U tablici su također prikazani i rezultati i za hi-kvadrat test. U rezultatima nema onih za L4 i L5 koji su bili izbačeni iz analize kod svake metode.

Tablica 19. Prikaz rezultata procjene kvalitete mjerenja laboratorija poredanih po vrijednosti E_n

<table>
<tr><th>Procjenitelji:</th><th>Modificirana težinska sredina</th><th>Totalni medijan</th><th>Kombinirana referentna vrijednost</th><th>χ^2</th></tr>
<tr><td>1.</td><td>L1</td><td>L1</td><td>L1</td><td>L1</td></tr>
<tr><td>2.</td><td>L8</td><td rowspan="2">L3 = L6</td><td rowspan="2">L3 = L6</td><td>L8</td></tr>
<tr><td>3.</td><td rowspan="2">L3 = L6</td><td rowspan="2">L3 = L6</td></tr>
<tr><td>4.</td><td>L7</td><td>L8</td></tr>
<tr><td>5.</td><td>L11</td><td>L8</td><td>L7</td><td>L11</td></tr>
<tr><td>6.</td><td>L7</td><td>L11</td><td>L11</td><td>L7</td></tr>
<tr><td>7.</td><td rowspan="3">L9 = L12 = L10</td><td>L9</td><td>L12</td><td>L9</td></tr>
<tr><td>8.</td><td>L12</td><td>L9</td><td>L12</td></tr>
<tr><td>9.</td><td>L10</td><td>L10</td><td>L10</td></tr>
<tr><td>10.</td><td>L2</td><td>L2</td><td>L2</td><td>L2</td></tr>
</table>

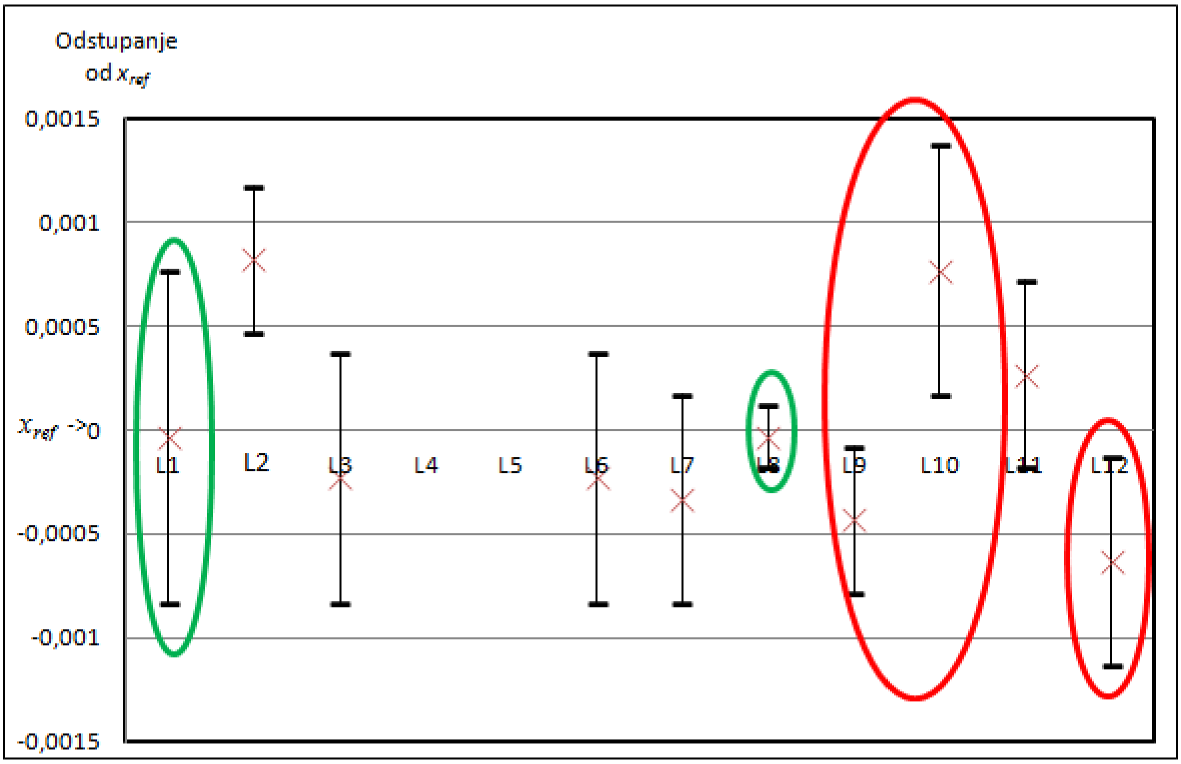
Iz tablice 19. se vidi da je i druga metoda, hi-kvadrat test, daje slične rezultate kao i prva metoda sa svojim procjeniteljima. Za drugu metodu je također potrebno izračunati referentnu vrijednost (*KCRV*) koja je ista kao težinska aritmetička sredina. Osim što su rezultati slični kao i prva metoda, također je bilo potrebno i tri koraka do zadovoljavanja hipoteze i izbačeni su također dva laboratorija, L4 i L5.

Pregledom rezultata se može zaključiti da nema velike razlike između metoda analize usporedbenih mjerenja zbog izbačenih istih mjerenja i slične procjene kvalitete mjerenja laboratorija. Međutim, procjena kvalitete mjerenja laboratorija ima nekoliko grešaka koje će se istaknuti u sljedećoj točki.

6. NEDOSTACI METODA ANALIZE USPOREDBENIH MJERENJA

U točci 5. smo zaključili da su metode koje se koriste za analizu dobre i da prepoznaju one podatke koje najviše odstupaju. Međutim, u današnjem svijetu, gdje je konkurentnost dignuta na jednu višu razinu moramo očekivati od metode da dobro procjenjuje podatke koje su ostali u analizi, tj. da im da svakom mjerenju značajnost u pravom omjeru s obzirom na druga mjerenja. Ove dvije analize, kako će biti prikazano u daljnjem tekstu, to ne ostvaruju. Postoji nekoliko anomalija koje će biti prikazane u sljedećem primjeru.

U slici 11. su prikazani rezultati mjerenja s modificiranom težinskom sredinom kao referentnom vrijednosti. Nema izbačenih laboratorija L4 i L5. u grafu su označeni rezultati koji će se komentirati u daljnjoj analizi.



Slika 11. Grafički prikaz rezultata s označenim anomalijama

U tablici 20. su prikazane vrijednosti faktora slaganja, njihovih odstupanja od referentne vrijednosti i mjerne nesigurnosti za označena mjerenja laboratorija.

Tablica 20. Faktor slaganja s odstupanjem i mjernom nesigurnosti za označene laboratorije

	L1	L8	L9	L10	L12
E_n	-0,02	-0,155	-0,65	0,65	-0,65
Odstupanje od $x_{ref.}$ [mm]	0,00003	0,00003	0,0004	0,0008	0,0006
u_{lab}	0,0008	0,00015	0,00035	0,0006	0,0005

Prva primijećena anomalija je u usporedbi L1 i L8. Na grafu na slici 11. i u tablici 20. možemo primijetiti da imaju isto odstupanje od referentne vrijednosti. Međutim, rezultat mjerenja L8 ima puno manju mjernu nesigurnost što bi trebalo značit da je to puno bolji rezultat, ali faktor slaganja za L1 je puno manji (7,75 puta) i time ovom metodom i bolji. Ovo je čisti primjer da se laboratoriju isplati dati veću nesigurnost jer će time njegov rezultat biti puno bolji.

Drugi primjer je također jako očit. Tri laboratorija, L9,L10 i L12 na kraju trećeg koraka analize imaju iste faktore slaganja u iznosu od 0,65. Pogledom na graf i na tablicu primjećuje se da rezultat mjerenja L9 je daleko najbolji. Najmanje odstupa od referentne vrijednosti i ima najmanju mjernu nesigurnost mjerenja. Po tim kriterijima taj bi rezultat trebao biti u konačnici bolji od ostalih. Također rezultat laboratorija L10 pokazuje da ima lošiji rezultat ne samo od L9 nego i od L12 jer ima i veće odstupanje od referentne vrijednosti i veću mjernu nesigurnost. Dakle, rezultati faktora slaganja za ova tri rezultata nikako ne bi smjeli biti isti. U ovom primjeru također dolazimo do zaključka da se više isplati dati veću nesigurnost mjerenja i time poboljšati rezultate faktora slaganja.

Ako promotrimo formulu faktora slaganja, kao glavni razlog takvog ponašanja tog kriterija je dio formule u nazivniku. Ako uzmemo za primjer L1 i L8, možemo zaključiti da im je brojnik isti zbog istog odstupanja od referentne vrijednosti. Razlika između ova dva mjerenja je u rezultatu mjerne nesigurnosti.

Formula za izračun faktora slaganja (19):

$$E_\mathrm{n} = \frac{x_{lab} - x_{ref}}{\mathrm{k} \cdot \sqrt{u^2(x_{lab}) - u^2(x_{ref})}}$$

Zbog ovakve formule, rezultat koji ima veću mjernu nesigurnost automatski ima i veći nazivnik, a time i manji E_n. Kao posljedicu kod našeg slučaja s dva laboratorija, L1 ima veću mjernu nesigurnost i zbog toga niži faktor slaganja i na temelju tog kriterija možemo zaključiti da ima bolje mjerenje.

Druga metoda, hi-kvadrat test se slično ponaša kao i metoda s faktorom slaganja. Kod hi-kvadrat testa u nazivniku je mjerna nesigurnost na kvadrat. Zbog toga, rezultat mjerenja koji ima isto odstupanje, a manju mjernu nesigurnost imati će veću vrijednost hi-kvadrata i smatrat će se da ima i lošiji rezultat.

6.1. Prijedlog rješenja problema nedostataka

Iz gornjih prijedloga očito je da treba pokušati dati veću važnost manjoj mjernoj nesigurnosti nego u standardnoj formuli, tj. da bude manji E_n što je manja mjerna nesigurnost. Prijedlog formule glasi ovako:

$$E_{\mathrm{n}} = \frac{x_{lab} - x_{ref}}{\mathrm{k}\cdot[1\cdot 10^{\mathrm{n}+2} - \sqrt{u^2(x_{lab}) - u^2(x_{ref})}]} \tag{38}$$

Formula je slična kao i za standardni faktor slaganja osim što u nazivniku razlika mjerne i referentne nesigurnosti koja se korjenuje se još oduzme od 1, tj. 1 puta 10^{n+2}. Malo n u eksponencijalnom dijelu ove jednadžbe je važno zbog jedinica u kojoj imamo izračunatu mjernu nesigurnost i rezultat mjerenja. Ako npr. mjerna nesigurnost iznosi 0,0008 mm, odnosno $8*10^{-4}$mm, n nam je tu -4. Zbog toga razliku mjerne nesigurnosti ćemo još jednom oduzeti od $1*10^{-4+2} = 0{,}01$.

U nastavku je dan jedan primjer s izračunom po ovoj formuli faktora slaganja. Referentne vrijednosti su ostale iste jer se ništa ne mijenja u njihovom načinu proračuna. Za referentnu vrijednost za prvi korak je uzeta vrijednost težinske aritmetičke sredine.

U tablici 221 su prikazani rezultati faktora slaganja izračunati s promijenjenom formulom i starom formulom, te vrijednosti Birgeovog kriterija koji ostaje nepromijenjen.

Tablica 21. Rezultati promijenjenog faktora slaganja (I. koraka)

Laboratorij:	*En*	E_n *novi*
L1	-0,18	-0,16
L2	0,83	0,29
L3	-0,42	-0,26
L4	2,47	1,6
L5	1,91	0,62
L6	-0,42	-0,26
L7	-0,60	-0,31
L8	-1,32	-0,15
L9	-1,03	-0,36
L10	0,43	0,27
L11	0,009	0,004
L12	-0,91	-0,47
x_{ref}, mm	200,004	
$u(x_{\mathrm{ref}})$, mm	0,0001	
R_b	2,303	
R_b<	1,361	

Rezultat E_n novi sam još pomnožio s 10 da bude lakše za uspoređivati rezultate. Može se primijetiti da i u ovom slučaju najveći E_n ima L4 i njega izbacujemo iz daljnjeg razmatranja. Pošto su ostali isti laboratoriji, a proračun za referentnu vrijednost se nije promijenio uzimamo istu referentnu vrijednost kao i u drugom koraku.

U tablici 22. su prikazani rezultati za standardni i novi faktor slaganje u drugom koraku.

Tablica 22. Rezultati promijenjenog faktora slaganja (II. koraka)

Laboratorij:	*En*	E_n *novi*
L1	-0,13	-0,11
L2	0,96	0,33
L3	-0,34	-0,21
L4	2,54	1,65
L5	2,23	0,68
L6	-0,34	-0,21
L7	-0,51	-0,26
L8	-0,93	-0,1
L9	-0,9	-0,31
L10	0,5	0,32
L11	0,11	0,05
L12	-0,82	-0,42
x_{ref}, mm	200,0039	
$u(x_{\text{ref}})$, mm	0,0001	
R_b	1,8028	
$R_b<$	1,376	

Nakon drugog koraka, pošto nije zadovoljen Birgeov kriterij moramo izbaciti jedan laboratorij i to onaj s najvećim faktorom slaganja. Kod nove metode to je također rezultat L5 i njega izbacujemo. Pošto je izbačen isti laboratorij možemo koristiti istu referentnu vrijednost kao i prilikom analize sa standardnim faktorom slaganja. Kod ovog koraka vrijednost faktora slaganja s novom formulom je također pomnožena s 10 radi lakšeg pregleda rezultata.

U tablici 23. su prikazani rezultati finalnog trećeg koraka s pripadajućim vrijednostima faktora slaganja.

Tablica 23. Rezultati promijenjenog faktora slaganja (III. koraka)

Laboratorij:	*En*	E_n *novi*
L1	-0,02	-0,017
L2	1,23	0,42
L3	-0,196	-0,12
L4	2,68	1,74
L5	2,3	0,76
L6	-0,196	-0,12
L7	-0,34	-0,17
L8	-0,155	-0,016
L9	-0,65	-0,22
L10	0,65	0,41
L11	0,31	0,14
L12	-0,65	-0,33
x_{ref}, mm	200,0037	
$u(x_{\mathrm{ref}})$, mm	0,00011	
R_b	1,1236	
$R_b<$	1,393	

Iz tablice 23. se vidi da najmanji E_n ima vrijednost L8 i nakon njega L1. Nova formula je otklonila anomaliju u prvom primjeru nedostataka ove metode. Drugi primjer gdje su faktori slaganja izjednačeni za mjerenja L9,L10 i L12 sada su mnogo bolja. Možemo primijetiti da je vrijednost faktora slaganja za L9 puno bolja u odnosu na L10 što je i realno. Drugi rezultati su ostali u istom rasporedu kao i kod prijašnje formule međutim neke su se razlike smanjile npr. razlika između L2 i L10 je bila nelogično velika (2 puta), sada je ta razlika puno manja. Razlika u rezultatima mjerenja ta dva laboratorija je bila što je L2 dao za 0,00005 mm veće odstupanje od L10 i uz to L2 je dao manju mjernu nesigurnost. Zbog toga razlika u faktoru slaganja od čak 2 puta nije bila logična.

U tablici 24. su dani rezultati za faktor slaganja kad je korištena kombinirana referentna vrijednost.

Tablica 24. Rezultati promijenjenog faktora slaganja uz kombiniranu referentnu vrijednost

Laboratorij:	*En*	E_n *novi*
L1	0,018	0,0156
L2	1,439	0,45
L3	-0,149	-0,091
L4	2,894*	1,77*
L5	3,102*	0,792*
L6	-0,149	-0,091
L7	-0,289	-0,14
L8	0,174	0,0145
L9	-0,608	-0,19
L10	0,72	0,44
L11	0,395	0,17
L12	-0,608	-0,3
x_{ref}, mm	200,00367	
$u(x_{\mathrm{ref}})$, mm	0,00017	
R_b	1,03	
R_b<	1,393	

Rezultati faktora slaganja su se s novom formulom isto promijenili i dobili smo slične rezultate kao i kod modificirane težinske sredine kao referentne vrijednosti. Razlika je što je faktor slaganja za L7 bolji od faktora slaganja L11, što je logično pošto je manje odstupanje mjerenja L7 od referentne vrijednosti.

Kako je ovaj primjer pokazao, nova formula faktora slaganja dala je različite rezultate, a opet je otklonila najveća odstupanja. Za računanje je možda jednostavnija stara formula jer se ne treba razmišljati o veličinama, a odradit će dobar posao prilikom izbacivanja laboratorija koji najviše odstupa.

Za prihvaćanje nove formule i njezinog utjecaja na usporedbena mjerenja potrebno je izvršiti još analiza i primjera usporedbe, te definirati točno izgled formule i njeno ponašanje s drugim podacima.

7. ZAKLJUČAK

Vrlo je bitno poznavati metode za analizu rezultata usporedbenih mjerenja jer rezultati analize usporedbenih mjerenja odlučuju o sudbini nekog laboratorija i o njima ovisi hoće li laboratorij dobiti certifikat. Za analizu rezultata se koriste različite metode koje daju procjenu mjerne sposobnosti laboratorija, a time i mogućnost međusobne usporedbe.

Najvažniji dio metoda je postupak određivanja referentne vrijednosti. U radu je izneseno nekoliko načina za njeno dobivanje. Referentna vrijednost je iznimno bitna jer ne postoji "super" laboratorij koji može točno odrediti mjeru mjernog predmeta. Od svih postupaka za dobivanje referentne vrijednosti najbolja se pokazala kombinacija totalnog medijana i modificirane težinske sredine.

Metode koje su se koristile u ovom radu za analizu rezultata pokazale su svoje dobre i loše strane. Dobra strana je što su uspjele pronaći rezultate s najvećim odstupanjem i procjena kvalitete mjerne sposobnosti laboratorija su im veoma ujednačene. Međutim, detaljna analiza je pokazala neke loše strane tih metoda. Vrijednosti faktora slaganja se ne poklapaju sa stvarnim podacima i zbog toga ima nelogičnosti u odnosima rezultata među više laboratorija. Na kraju je dana modificirana formula za faktor slaganja kao primjer mogućeg rješenja problema. U ovom primjeru analize modificirana formula se pokazala boljom, međutim potrebno je još testiranja modificirane formule da bih se usavršila.

Nema sumnje da je promjena potrebna zbog nelogičnosti koje se pojavljuju upotrebom postojećih formula faktora slaganja koja očito samo otklanja velika odstupanja rezultata.

Literatura:

[1] Ivo Pavlić: Statistička teorija i primjena, Tehnička knjiga Zagreb, 1977

[2] Maurice Cox; Eulogio Pardo Iguzquiza: The total median and its uncertainty: Advanced Mathematical and Computational Tools in Metrology V, World Scientific Publishing Company, 2001.

[3] B. R. L. Siebert; P. Ciarlini: Feasibility study of using bootstrap to compute the uncertainty contribution from few repeated measurements: Advanced Mathematical and Computational Tools in Metrology VI, World Scientific Publishing Company, 2004.

[4] Maurice Cox: A discussion of approaches for determining a reference value in the analysis of key-comparison data: Advanced Mathematical and Computational Tools in Metrology IV, World Scientific Publishing Company, 2000.

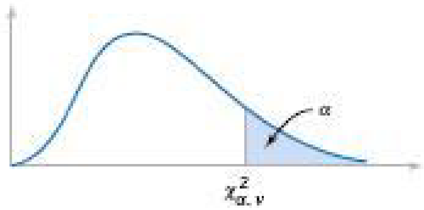
[5] CCL Key Comparison; The Calibration of Internal and External Diameter Standards CCL-K4; Final report, January 2007.

[6] B. Runje, Istraživanje mjernih nesigurnosti u postupcima umjeravanja etalona duljine, Doktorska disertacija, FSB Zagreb, 2002.

[7] Državni zavod za normalizaciju i mjeriteljstvo, *Upute za iskazivanje mjerne nesigurnosti*, Zagreb, 1995.

Prilog:

Statističke tablice: Tablica VII
Hi-kvadrat razdioba (χ^2 razdioba)



ν \ α	.995	.990	.975	.950	.900	.500	.100	.050	.025	.010	.005
1	.00+	.00+	.00+	.00+	.02	.45	2.71	3.84	5.02	6.63	7.88
2	.01	.02	.05	.10	.21	1.39	4.61	5.99	7.38	9.21	10.60
3	.07	.11	.22	.35	.58	2.37	6.25	7.81	9.35	11.34	12.84
4	.21	.30	.48	.71	1.06	3.36	7.78	9.49	11.14	13.28	14.86
5	.41	.55	.83	1.15	1.61	4.35	9.24	11.07	12.83	15.09	16.75
6	.68	.87	1.24	1.64	2.20	5.35	10.65	12.59	14.45	16.81	18.55
7	.99	1.24	1.69	2.17	2.83	6.35	12.02	14.07	16.01	18.48	20.28
8	1.34	1.65	2.18	2.73	3.49	7.34	13.36	15.51	17.53	20.09	21.96
9	1.73	2.09	2.70	3.33	4.17	8.34	14.68	16.92	19.02	21.67	23.59
10	2.16	2.56	3.25	3.94	4.87	9.34	15.99	18.31	20.48	23.21	25.19
11	2.60	3.05	3.82	4.57	5.58	10.34	17.28	19.68	21.92	24.72	26.76
12	3.07	3.57	4.40	5.23	6.30	11.34	18.55	21.03	23.34	26.22	28.30
13	3.57	4.11	5.01	5.89	7.04	12.34	19.81	22.36	24.74	27.69	29.82
14	4.07	4.66	5.63	6.57	7.79	13.34	21.06	23.68	26.12	29.14	31.32
15	4.60	5.23	6.27	7.26	8.55	14.34	22.31	25.00	27.49	30.58	32.80
16	5.14	5.81	6.91	7.96	9.31	15.34	23.54	26.30	28.85	32.00	34.27
17	5.70	6.41	7.56	8.67	10.09	16.34	24.77	27.59	30.19	33.41	35.72
18	6.26	7.01	8.23	9.39	10.87	17.34	25.99	28.87	31.53	34.81	37.16
19	6.84	7.63	8.91	10.12	11.65	18.34	27.20	30.14	32.85	36.19	38.58
20	7.43	8.26	9.59	10.85	12.44	19.34	28.41	31.41	34.17	37.57	40.00
21	8.03	8.90	10.28	11.59	13.24	20.34	29.62	32.67	35.48	38.93	41.40
22	8.64	9.54	10.98	12.34	14.04	21.34	30.81	33.92	36.78	40.29	42.80
23	9.26	10.20	11.69	13.09	14.85	22.34	32.01	35.17	38.08	41.64	44.18
24	9.89	10.86	12.40	13.85	15.66	23.34	33.20	36.42	39.36	42.98	45.56
25	10.52	11.52	13.12	14.61	16.47	24.34	34.28	37.65	40.65	44.31	46.93
26	11.16	12.20	13.84	15.38	17.29	25.34	35.56	38.89	41.92	45.64	48.29
27	11.81	12.88	14.57	16.15	18.11	26.34	36.74	40.11	43.19	46.96	49.65
28	12.46	13.57	15.31	16.93	18.94	27.34	37.92	41.34	44.46	48.28	50.99
29	13.12	14.26	16.05	17.71	19.77	28.34	39.09	42.56	45.72	49.59	52.34
30	13.79	14.95	16.79	18.49	20.60	29.34	40.26	43.77	46.98	50.89	53.67
40	20.71	22.16	24.43	26.51	29.05	39.34	51.81	55.76	59.34	63.69	66.77
50	27.99	29.71	32.36	34.76	37.69	49.33	63.17	67.50	71.42	76.15	79.49
60	35.53	37.48	40.48	43.19	46.46	59.33	74.40	79.08	83.30	88.38	91.95
70	43.28	45.44	48.76	51.74	55.33	69.33	85.53	90.53	95.02	100.42	104.22
80	51.17	53.54	57.15	60.39	64.28	79.33	96.58	101.88	106.63	112.33	116.32
90	59.20	61.75	65.65	69.13	73.29	89.33	107.57	113.14	118.14	124.12	128.30
100	67.33	70.06	74.22	77.93	82.36	99.33	118.50	124.34	129.56	135.81	140.17

υ=*k* (broj stupnjeva slobode)